



universität
wien

BACHELORARBEIT

Titel der Bachelorarbeit

Parametrisierung der Bodentemperatur

verfasst von
Lukas Kugler

angestrebter akademischer Grad
Bachelor of Science (BSc)

Wien, im September 2017

Studienkennzahl: A 033 604
Studienrichtung: Bachelorstudium Meteorologie
Betreuer: Dipl.-Ing. Mag. Dr. Dieter Mayer

Abstract

The prediction of surface (skin) temperature remains a challenging task which is apparent considering only its higher variability in space and time compared to air temperature but also due to the great number of couplings from radiation to heat conduction between atmosphere and litho-, cryo- or hydrosphere. The influencing processes range from mesoscale weather phenomena to ground or soil inhomogenities in a sub-metre scale and may vary on a time scale within seconds like solar radiation by as much as 90% superimposing the diurnal cycle.

This work presents and compares three *land surface models* which are tested with real in-situ measured data provided by UBIMET. The main argument in all models is energy conservation which is taken (1) as budget equation for a thin surface layer or (2) in a form for the (surface) interface.

The first model solves the heat fluxes, which appear in the surface energy balance, for the surface temperature as a fourth order polynomial algebraically.

The second model works in a completely different manner: it seeks a spatially analytic solution for the sub-surface heat conduction. Wang et al. (2010) provides an equation to compute the surface temperature as a function of ground heat flux. The surface ground heat flux is calculated as residual of all other heat fluxes at the surface. This avoids the parameterization of the ground heat flux and does not restrict the schemes used to calculate other heat fluxes. The parameterization of the latent heat flux comes from a road surface model of Sass (1992, 1997) and Crevier and Delage (2001) and predicts mass of water per square meter from a budget equation.

The third model implements the energy budget with heat storage and solves the heat equation by discretization in space and time. It serves as a benchmark to assess the two other models.

Zusammenfassung

Die Vorhersage der Oberflächentemperatur stellt bis heute eine schwierige Aufgabe dar. Sie ist räumlich und zeitlich höher variabel als die Lufttemperatur und aufgrund der Vielzahl an Kopplungen mit Strahlung und Wärmeleitung im Grenzbereich zwischen Atmosphäre und Litho-, Kryo-, bzw. Hydrosphäre komplexer. Sie bewegt sich im Übergang zwischen mesoskaligen Wetterphänomenen und Bodenheterogenitäten im Zentimeterbereich. Strahlungsintensitäten schwanken in Sekunden um 90 % und überlagern den Tagesgang. Dementsprechend ist bei der Entwicklung von mathematisch-physikalischen Modellen, die in dieser Arbeit vorgestellt werden, höchste Genauigkeit gefordert.

In der vorliegenden Arbeit werden drei verschiedene Modelle vorgestellt, verglichen und anhand von Testläufen mit Messdaten von UBIMET auf Anwendbarkeit geprüft. Allen Modellen gemeinsam ist die Energieerhaltung, welche sich als Bilanzgleichung für eine Fläche oder ein Volumen darstellt.

Das erste Modell sucht die Oberflächentemperatur in den Parametrisierungen der Energieflüsse, welche in der Oberflächen-Energiebilanzgleichung vorliegen, und löst diese als Polynom vierten Grades algebraisch.

Das zweite Modell verfolgt einen vollkommen anderen Zugang: die Wärmeleitungsgleichung des Bodens wird räumlich analytisch gelöst. Dafür stellt Wang et al. (2010) die Oberflächentemperatur als Funktion des Bodenwärmestroms zur Verfügung. Der Bodenwärmestrom an der Oberfläche wird über die Oberflächenenergiebilanz als Summe der restlichen Wärmefflüsse bestimmt. Dies hat den Vorteil, dass die Parametrisierung des Bodenwärmestroms selbst nicht nötig ist und die restlichen Wärmefflüsse beliebig komplex parametrisiert werden können. Die Parametrisierung des latenten Wärmestroms erfolgt aus dem *Road-Surface-Model* von Sass (1992, 1997) bzw. Crevier and Delage (2001) und beinhaltet die Lösung einer Haushaltsgleichung der Masse Wasser pro Quadratmeter.

Das dritte Modell ist eine Implementierung der Energiebilanz mit Speicherterm und vollständiger Diskretisierung der unterirdischen Wärmeleitung und soll die Ergebnisse der übrigen Modelle plausibilisieren.

Symbole und Konventionen

$f(x)$	allgemeines Symbol für die eine Funktion f der Variable x
Q_H	Fluss fühlbarer Wärme; positiv nach oben
Q_E	Fluss latenter Wärme; positiv nach oben
Q_G	Bodenwärmestrom; positiv nach unten; je nach Formulierung (Abschn. 4.1.3) entweder direkt an der Oberfläche oder in einer Tiefe Δz
$\mathbf{q} * \Delta \mathbf{G}$	diskretisiertes Konvolutionsintegral gemäß Definition 2.22 zwischen dem Vektor der Wärmeflüsse bis zum aktuellen Zeitpunkt $\mathbf{q} = (q^0, \dots, q^n)^T$ und $\Delta \mathbf{G}(x) = (\Delta G^1(x), \dots, \Delta G^n(x))^T$.
$T^n = T(t^n)$	Wert von T zum Zeitpunkt $t = t^n$
Superskripte	Superskripte im Abschnitt <i>Parametrisierungen</i> (3), sowie im Abschnitt <i>Polynom-Modell</i> (4.2) bezeichnen Potenzen, anderenorts den zeitlichen Index.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Aufbau der Arbeit	3
2	Theoretische Grundlagen	5
2.1	Grundlagen der Thermodynamik	5
2.1.1	Historie und Gültigkeitsgrenzen	5
2.1.2	Energiegleichung	7
2.1.3	Thermodynamische Flüsse	8
2.2	Analytische Lösung der Wärmeleitungsgleichung	10
2.3	Numerische Methoden	13
2.3.1	Crank-Nicolson-Verfahren	13
2.3.2	Fixpunktiteration	15
3	Parametrisierungen der Wärmeflüsse	17
3.1	Strahlungsflüsse	17
3.2	Fluss latenter Wärme	18
3.3	Bodenwärmefluss	20
3.4	Fluss fühlbarer Wärme	20
3.5	Weitere Wärmeflüsse	21
4	Prognosemodelle	23
4.1	Beschreibung der Modelle	23
4.1.1	Kategorisierung	23
4.1.2	Parallelisierbarkeit	24
4.1.3	Formulierungen der Energiebilanz	25
4.2	Polynom-Modell	27
4.2.1	Parametrisierungen	27
4.2.2	Lösungsverfahren	31
4.3	Räumlich analytisches Modell	32
4.3.1	Erweiterung auf mehrere Schichten	36
4.4	Räumlich diskretes Modell	42
5	Diskussion	45
5.1	Anwendung auf Messdaten	45
	Literaturverzeichnis	48
	Appendix - Formeln & Anwendung auf Messdaten	51

1 Einleitung

1.1 Motivation

Die Oberflächentemperatur ist sprichwörtlich „näher dran“ als die meist vorhergesagte Lufttemperatur und ist daher von größerer Bedeutung für das persönliche Wärmegefühl, Frost- oder Hitzeschäden in der Landwirtschaft, für Haftreibung auf Straßen oder Vereisung von Objekten.

Die Oberflächentemperatur der Straßen, Stromleitungen und Windräder ist mitbestimmend, ob Niederschlag anfrieren kann. Die Oberflächentemperatur des Asphalts bestimmt die Haftreibung von Reifen und damit die Wertung der Auto- und Motorradrennen.

Die Vorhersage selbst ist jedoch bis heute eine schwierige Aufgabe aufgrund der Vielzahl beteiligter Prozesse auf unterschiedlichsten Raum- und Zeitskalen. Dadurch ist die Oberflächentemperatur oft räumlich und zeitlich höher variabel als die Lufttemperatur.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, verschieden komplexe Modelle vorzustellen, die die Vorhersage der Oberflächentemperatur auf Wetterdaten von *NWP*¹-Modellen und Oberflächeneigenschaften zurückführen. Aus rechentechnischer Sicht ist es günstig zu wissen, ob die Wärmespeicherung im Boden in einem nichtiterativen Algorithmus möglich ist.

Während die Erhöhung der Auflösung von numerischen Wettermodellen auf Gitterweiten unter 1 km den Rechenaufwand maßgeblich erhöht, lässt sich durch ein separates Bodenmodell (*Land Surface Model*) in der Modellkette die hochaufgelöste Vorhersage der Oberflächentemperatur einfachst umsetzen, da die Variationen der Oberflächentemperatur größtenteils auf Unterschiede der Oberflächeneigenschaften zurückzuführen sind. Berücksichtigt man diese, so lassen sich selbst auf dieser Skala Prognosen treffen.

Die Energiebilanz ist der Ausgangspunkt dieser Arbeit. Ist sie defizitär wie nach

¹Numerical Weather Prediction

Sonnenuntergang im Winter, frieren wir. Verantwortlich dafür muss nicht ein einziger Faktor sein, denn zahlreiche Einflussfaktoren wie Lufttemperatur und -feuchte; solare, terrestrische und atmosphärische Gegenstrahlung wirken ein und verursachen zusammen mit den thermischen Eigenschaften der Bekleidung und der physiologischen Besonderheit jeder Einzelnen das persönliche Wärmegefühl. Und doch - die Energiebilanz ermöglicht es, die Entwicklung der Oberflächentemperatur auf das Zusammenwirken der Wärmeflüsse (Wärmeflusskonvergenz) zurückzuführen und die Parametrisierungen ermöglichen es, die Wärmeflüsse aus den Umgebungsfaktoren abzuleiten.

Den Weg von den Umgebungsfaktoren auf die Oberflächentemperatur zu gehen, ist das Ziel dieser Arbeit. Zur Einschränkung sollen nur wasserundurchlässige Oberflächen behandelt werden: das sind in erster Linie Gebäude, Fahrzeuge, sowie in guter Näherung Asphalt- und Betonflächen.

Charakterisierung der Modelle

Aus praktischer Sicht zeichnen sich die Modelle durch folgende Merkmale aus:

Das räumlich analytische Modell durch:

- beliebige räumliche Auflösung des Temperaturverlaufs im Boden
- Berücksichtigung der tatsächlichen Asphaltstruktur²
- rechentechnisch günstiger als räumlich diskretisierte Modelle
- Zeitschritt wird nicht durch räumliche Auflösung beschränkt
- keine Stabilitätsprobleme wie bei vollständiger Diskretisierung

sowie Modellierung des Wasserhaushalts und damit einhergehender Vorhersage der Straßennässe.

Das Polynom-Modell durch:

- hochgradig parallele Berechnung (nicht zeitlich iterativ)
- vereinfachte Parametrisierungen

² im Mehrschichtmodell, Abschnitt 4.3.1

1.2 Aufbau der Arbeit

Abschnitt 2 wiederholt Grundlagen der irreversiblen Thermodynamik auf Basis der Lehrbücher von Hantel (Hantel, 2013), Honerkamp & Römer (Honerkamp and Römer, 2012) und Lebon et.al. (Lebon et al., 2008), die Lösung der Wärmeleitungsgleichung mittels Greenscher Funktion und Grundlagen numerischer Methoden zur Lösung von Differentialgleichungen und nichtlinearer Funktionen.

Abschnitt 3 liefert Parametrisierungen wichtiger Wärmeflüsse aus entsprechender Literatur, sofern sie für die Umsetzung eines operativen Modells nötig wären. Die Auswahl der Ansätze erfolgte meist nach praktischen Gesichtspunkten, besonders im Hinblick auf die Lösung als Polynom der gesuchten Oberflächentemperatur.

Abschnitt 4 beschreibt die behandelten Modelle zur Vorhersage der Oberflächentemperatur aus physikalischen und mathematischen Methoden unter Verwendung der Grundlagen aus Abschnitt 2.

Abschnitt 5 erklärt die Anwendung der Modelle auf reale Messdaten und macht auf ausgewählte Charakteristiken der produzierten Modellvorhersagen aufmerksam.

Ab hier wird der abgekürzte Begriff 'Temperatur' statt '*Oberflächentemperatur*' verwendet. Falls die Lufttemperatur oder die Strahlungstemperatur der Atmosphäre gemeint sind, werden auch deren volle Namen verwendet.

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Abschnitt soll eine Zusammenfassung der physikalischen, numerischen und teilweise auch mathematischen Grundlagen erfolgen, die im Anschluss zur methodischen Umsetzung notwendig sind.

2.1 Grundlagen der Thermodynamik

In der Abhandlung der Thermodynamik wird speziell auf das Verständnis der Annahmen, ihrer Auswirkungen und auf Einschränkungen der Theorie Wert gelegt. Dazu wurde vorwiegend auf die Lehrbücher von Hantel (2013), Honerkamp and Römer (2012) und Lebon et al. (2008) zurückgegriffen.

2.1.1 Historie und Gültigkeitsgrenzen

Die Thermodynamik entstand historisch aus der Untersuchung von Dampfmaschinen und damit der Möglichkeit Wärmeenergie in kinetische Energie überzuführen. Der Energiebegriff selbst war jedoch noch nicht von Beginn an derart klar begriffen wie heute.

Viele naturwissenschaftliche Karrieren widmeten sich bis heute diesem makroskopischen Studium physikalischer Systeme, brachten die unterschiedlichsten Betrachtungsweisen ein, entwickelten die Thermodynamik zu einer Theorie und einem Werkzeug, welches heute in vielen ingenieurtechnischen Bereichen eingesetzt wird und doch ist die Forschung nicht zum Erliegen gekommen - selbst in jüngerer Zeit kam es auch zu Entdeckungen (Nobelpreise 1968¹ und 1977²) - trotz dem Umstand, dass der wissenschaftliche Fokus der modernen Physik heute in der mikroskopischen Untersuchung von Systemen liegt. Die Thermodynamik als makroskopische Theorie bleibt weiterhin

¹ verliehen an Lars Onsager für die Entdeckung der nach ihm benannten wechselseitigen Beziehungen, welche grundlegend für die Thermodynamik irreversibler Prozesse sind (Nobelprize.org, abgerufen am 11.9.16)

² verliehen an Ilya Prigogine für die Beiträge zur Nichtgleichgewichtsthermodynamik, insbesondere zur Theorie dissipativer Strukturen (Nobelprize.org, abgerufen am 11.9.16)

für viele Bereiche von großer Bedeutung und hat Zukunft, wovon auch Einstein überzeugt war, als er schrieb:

„Eine Theorie ist desto eindrucksvoller, je größer die Einfachheit ihrer Prämissen ist, je verschiedenartigere Dinge sie verknüpft und je weiter ihr Anwendungsbereich ist. Deshalb der tiefe Eindruck, den die klassische Thermodynamik auf mich machte. Es ist die einzige physikalische Theorie allgemeinen Inhalts, von der ich überzeugt bin, dass sie im Rahmen der Anwendbarkeit ihrer Grundbegriffe niemals umgestoßen wird (zur besonderen Beachtung der grundsätzlichen Skeptiker).“

In diesem Zitat wird bereits auf die Gültigkeitsgrenzen der Theorie hingewiesen, von denen nun zwei herausgegriffen werden sollen:

Kontinuumsannahme: Eine Zustandsvariable, z.B. die Temperatur, soll für jeden Ort im Raum definiert und räumlich stetig differenzierbar sein. Dazu muss jedoch räumlich gemittelt werden, denn sobald z.B. die Temperatur für ein System in der Größenordnung von einigen Molekülabständen bestimmt würde, würde sich der quantisierte Aufbau der Materie bemerkbar machen und zu Sprüngen in der räumlichen Temperaturverteilung führen. (Batchelor, 2000) Deshalb ist über eine ausreichende Zahl an Teilchen zu mitteln. Die Kontinuumsannahme geht also direkt mit der makroskopischen Betrachtungsweise der Thermodynamik einher. Für die Bereiche der Atmosphärenphysik ist dies jedoch keine Einschränkung, denn die Anwendungsgrenze der Thermodynamik ist selbst dann noch nicht erreicht, wenn man einen Kubik-Mikrometer betrachtet: selbst in der „dünnen Luft“ der Stratosphäre finden sich noch etwa $N = pV/k_B T = 10 \text{ hPa} \cdot 1 \mu\text{m}^3 / (k_B \cdot 200 \text{ K}) \approx 10^6$ Teilchen pro μm^3 .

Lokales Gleichgewicht: In der klassischen Thermodynamik werden nur Systeme beschrieben, die sich im thermodynamischen Gleichgewicht oder infinitesimal entfernt befinden. Die Erweiterung der Theorie auf Prozesse abseits von Gleichgewichtszuständen reduziert diese Voraussetzung auf ein *lokales* Gleichgewicht. Das heißt, dass die Größenskala auf der z.B. die Temperatur definiert wird, klein genug ist, dass die räumliche Variabilität der Temperatur erhalten bleibt und groß genug ist, dass mikroskopische Fluktuationen vernachlässigbar sind. (Lebon et al., 2008)

Um Wärmeleitung, Verdunstung und Kondensation modellieren zu können, sind einige Grundgleichungen nötig. Diese sollen nun hergeleitet werden.

2.1.2 Energiegleichung

Die experimentellen Erfahrungen der Thermodynamik in den letzten Jahrhunderten können in Hauptsätzen zusammengefasst werden. „Sie formulieren Prinzipien, die durch experimentelle Erfahrungen motiviert sind, aber niemals streng bewiesen werden können³. Die Zuverlässigkeit dieser Prinzipien liegt in der Zahl der Erfolge, dem Fehlen von Misserfolgen und in der Voraussagekraft für bisher unbekannte Fälle“ (Honerkamp and Römer, 2012).

Der erste Hauptsatz fasst das Konzept der *Energie* als grundlegende Erhaltungsgröße auf:

„Energie kann weder erzeugt noch vernichtet werden“

Für ein abgeschlossenes System ergibt sich damit das *Prinzip der Energieumwandlungen*: Es gibt verschiedene Energieformen, die sich ausschließlich ineinander umwandeln können. Dies ist in der Gibbs-Gleichung formalisiert:

$$dE = \sum_i x_i dX_i \quad (2.1)$$

Für ein System, welches nur Entropie S , Volumen V und chemische Zusammensetzung, d.h. die Masse M_i an Molekülart i , ändern kann, lautet sie:

$$dE = T dS - p dV + \sum_i \mu_i dM_i \quad (2.2)$$

worin E die Energie, T die absolute Temperatur und μ_i das jeweilige chemische Potential darstellt - oder in spezifischer Form mit den Massenkonzentrationen c_i , der spezifischen Formen der Energie $u = E/M$, Entropie s und Volumen α :

$$du = T ds - p d\alpha + \sum_i \mu_i dc_i. \quad (2.3)$$

Weiters lässt sich eine Bilanzgleichung für die innere Energie

$$\rho \frac{du}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.4)$$

mit dem Wärmefluss \mathbf{q} aufstellen⁴. Einen Quellterm sucht man hier aufgrund des ersten

³ Das Noether-Theorem kann z.B. die Energieerhaltung auf die Zeitinvarianz physikalischer Gesetze zurückführen. Diese ist eine Grundvoraussetzung um Physik zu betreiben und entspricht der experimentellen Erfahrung, ist jedoch nicht streng beweisbar.

⁴ hier ohne innerer Reibung oder chemischer Wärmequellen; ρ bezeichnet die Massendichte

Hauptsatzes vergeblich.

Experimentell zeigt sich, dass ein Zusammenhang zwischen einer Änderung der Energie du und der Temperatur dT besteht

$$du = \underbrace{\frac{du}{dT}}_{=c} dT, \quad (2.5)$$

wobei die Wärmekapazität c meist nur eine geringe Temperaturabhängigkeit besitzt und für viele Anwendungen konstant gesetzt werden kann.

Gewinnt man also Kenntnis über \mathbf{q} , so lässt sich die Tendenz der Temperatur durch die Bilanzgleichung der inneren Energie bestimmen:

$$\rho c \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.6)$$

2.1.3 Thermodynamische Flüsse

Die Magnitude und Richtung des Wärmeflusses auf die Temperatur und Eigenschaften des Mediums zurückzuführen, leistet das Fouriersche Gesetz

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T. \quad (2.7)$$

Es lässt sich zwar theoretisch zeigen, dass dieses „Gesetz“ nur eine Näherung für geringe⁵ Gradienten ist, hat sich jedoch in den Grenzen ihrer Anwendbarkeit im Rahmen der Atmosphärenphysik auch aufgrund ihrer Einfachheit als exakt und nützlich erwiesen.

Analog zu Fourier erhält man für die Diffusion das Ficksche Gesetz, $\mathbf{J}_c = -D \nabla c$, als Spezialfall für eine Konzentration c nahe einer Referenzkonzentration c_0 , welche in der Konstante D steckt.

Allen Ansätzen gemeinsam ist die Eigenschaft, dass bei Vorliegen eines Energieflusses Entropie produziert wird. Anderenfalls wären viele Phänomene denkbar, die in der Natur nie aufgetreten sind, z.B. der Wärmefluss von kalt zu warm, oder die Rückwärtsdiffusion eines Tropfens Tinte in Wasser.

Einsetzen des Fourier-Ansatzes 2.7 in 2.6 liefert die Wärmeleitungsgleichung

$$\rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T). \quad (2.8)$$

⁵ wenn ∇T^{-1} in guter Näherung gleich $\frac{1}{T_0} \nabla T$, $T_0 = \text{const.}$

Zur Modellierung von Verdunstung oder Kondensation müssen die Luftschichten nahe der Oberfläche modelliert werden. Hierbei befindet sich der diffundierende Stoff Wasser jedoch in einem strömenden Medium. Daher ist der advective Fluss zu berücksichtigen, der den diffundierenden Stoff in der Strömung mitführt:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla c$$

Dadurch ergibt sich jedoch eine viel komplexere Gleichung, da sie von den Strömungsverhältnissen abhängt, die nahe der Oberfläche vorliegen. Mit dem Diffusionsfluss $-D\nabla c$ ergibt sich:

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla c + \nabla \cdot (D\nabla c) = 0 \quad (2.9)$$

Neben dieser Gleichung der Kontinuumsmechanik existieren aber auch weitere Methoden zur Modellierung von Verdunstung und Kondensation, z.B. die kinetische Gastheorie oder die *statistical rate theory*. Bis 2013 konnte sich jedoch keine Methode durchsetzen (Haider, 2013).

Die Komplexität der fühlbaren und latenten Wärmeflüsse zur Atmosphäre hängt damit unmittelbar mit dem Medium Luft zusammen, dessen Strömung modelliert werden müsste. In einer operationellen Umsetzung ist es nicht zweckmäßig diese Strömungen auf Sub-Meter Skala aufzulösen. Viel mehr können die fühlbaren und latenten Wärmeflüsse mit einfachen Ansätzen als zeitliche Mittel experimentell bestimmt werden.

Wärmeleitung an Grenzflächen: Für den Wärmefluss an einer Grenzfläche zweier Medien gilt, dass der Fluss an der Oberseite dem Fluss an der Unterseite entsprechen muss. Dies folgt aus der Energieerhaltung (Glg. 2.4), da Energie auch an der Grenzfläche weder produziert noch vernichtet werden kann. Ist der konduktive Wärmefluss q der einzige vorliegende Energiefluss, so muss der Wärmefluss an der Oberseite q_1 dem an der Unterseite q_2 entsprechen. Es ergibt sich folgende Beziehung für die Temperaturgradienten an der Grenzfläche ($x = x_0$) zwischen Medium 1 und Medium 2:

$$\kappa_1 \left. \frac{dT_1}{dx} \right|_{x_0} = \kappa_2 \left. \frac{dT_2}{dx} \right|_{x_0} \quad (2.10)$$

Grenzt daher ein gut leitender Stoff (hohe Wärmeleitfähigkeit κ) an einen weniger gut leitenden Stoff, ist der Temperaturgradient im weniger gut leitenden Stoff betragsmäßig größer.

2.2 Analytische Lösung der Wärmeleitungsgleichung

Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit zeitabhängigen Randbedingungen basiert auf zwei Säulen:

1. Die Methode der Greenschen Funktionen löst die Wärmeleitungsgleichung,
2. die Verwendung zeitabhängiger Randbedingungen ist jedoch erst durch das Duhamelsche Prinzip möglich.

Die theoretischen Grundlagen und Beispiele beider Methoden sind in Hahn and Ozisik (2012) S.300 ff und das Duhamelsche Prinzip speziell in Beck et al. (1985) S.80 ff nachzulesen. Die folgende Motivation beschränkt sich auf die Methode der Greenschen Funktion.

Motivation zur Green-Funktion: Die Lösung mit Greenschen Funktionen einer Differentialgleichung (DGL) lässt sich folgendermaßen zusammenfassen:

1. Die zu lösende inhomogene gewöhnliche DGL muss sich mit dem auf x wirkenden Differentialoperator \mathcal{D}_x als

$$\mathcal{D}_x y(x) = f(x) \quad (2.11)$$

schreiben lassen.

2. Es existiere eine sogenannte Green-Funktion $G(x, x')$, sodass

$$\mathcal{D}_x G(x, x') = \delta(x - x') \quad (2.12)$$

Die Lösung ergibt sich dann als

$$y(x) = \int_a^b G(x, x') f(x') dx', \quad (2.13)$$

aufgrund der Annahmen 1 & 2:

$$\mathcal{D}_x y(x) = \mathcal{D}_x \int_a^b G(x, x') f(x') dx' = \int_a^b \underbrace{\mathcal{D}_x G(x, x')}_{\delta(x-x')} f(x') dx' = f(x)$$

Anwendung auf die Wärmeleitung: Angewandt auf die Wärmeleitung gibt Hahn and Ozisik (2012) eine illustrative Beschreibung der Greenschen Funktion. Demnach hat sie auch eine physikalische Bedeutung: „Die Green Funktion repräsentiert die Temperaturdifferenz von einer anfänglichen Temperaturverteilung an beliebigem Ort x und Zeit t im Medium, welche durch eine instantane Wärmequelle⁶ am Ort $x = x'$ und Zeit $t = \tau$ zustande kommt.“⁷

Das verwendete Modell: Zur Modellierung in dieser Arbeit wird Wang et al. (2010) verwendet. Er beschreibt die Wärmeleitung in einem eindimensionalen Medium konstanter Konduktivität mit räumlicher Ausdehnung $x \in [0, d]$. Zur Verkürzung der nachfolgenden Gleichungen wird die Differenz θ zur konstanten Anfangstemperatur T_0 verwendet:

$$\theta(x, t) = T(x, t) - T_0 \quad (2.14)$$

Die Randbedingungen zur Ableitung der Impuls-Green Funktionen g_1 und g_2 lauten dann (Wang et al., 2005)

$$-k \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} = \delta(t), \quad -k \frac{\partial \theta(d, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.15a)$$

für die Impuls-Green Funktion g_1 , die den Wärmetransport von der Oberfläche nach unten modelliert, und

$$-k \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} = 0, \quad -k \frac{\partial \theta(d, t)}{\partial x} = \delta(t) \quad (2.15b)$$

für die Impuls-Green Funktion g_2 , die den Wärmetransport von der Unterseite der Schicht nach oben modelliert. Mathematisch heißt das, dass Gleichung 2.15a durch Funktion g_1 und Gleichung 2.15b durch g_2 gelöst wird. Der Wärmefluss soll komplett zum Zeitpunkt $t = 0^+$ erfolgen, was zur Folge hat, dass zu diesem Zeitpunkt g_1 und g_2 singular sind. Um diese Unstetigkeiten zu vermeiden, werden die zeitlich integralen Formen von g_i verwendet, welche auch „step Green’s functions“ genannt werden:

$$G_i(x, t) = \int_0^t g_i(x, \tau) d\tau, \quad i = 1, 2 \quad (2.16)$$

⁶ mit integraler Stärke eins

⁷ Übersetzung aus dem Englischen (Hahn and Ozisik, 2012)

Wie Wang et al. (2010) darlegt, ist die Lösung unter Berücksichtigung zeitlich variabler Wärmeflüsse q_i durch die Konvolution

$$\theta(x, t) = \int_0^t g_1(x, t - \tau) q_1(\tau) d\tau + \int_0^t g_2(x, t - \tau) q_2(\tau) d\tau \quad (2.17)$$

gegeben, wird jedoch, um die Unstetigkeit in den g_i zu vermeiden, in einer Formulierung mit den G_i verwendet:

$$\theta(x, t) = \int_0^t q_1(t - \tau) dG_1(x, \tau) + \int_0^t q_2(t - \tau) dG_2(x, \tau) \quad (2.18)$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Temperaturverlauf in einem Medium ohne räumliche Diskretisierung berechnet werden kann, sofern die Wärmeflüsse q_1 und q_2 bekannt sind.

Die Genauigkeit der Temperaturprognose hängt nun aber auch von dem Fehler in der Berechnung der G_i ab. Diese sind meist nur als unendliche Summen verfügbar und müssen daher unweigerlich an einem bestimmten Punkt abgebrochen werden. Ein Augenmerk in der Bestimmung der Greenschen Funktionen liegt daher darin, Reihen zu finden, die möglichst schnell konvergieren und damit recheneffizient umsetzbar sind. Wang et al. (2010) schlägt folgende Form von Beck et al. (1992) vor, welche für große Fourier-Zahlen exponentiell konvergiert:

$$G_1(x, t) = \frac{\alpha t}{kd} + \frac{d}{6k} \left[3 \left(1 - \frac{x}{d} \right)^2 - 1 \right] - \frac{2d}{\pi^2 k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \left(\frac{n\pi x}{d} \right) \exp \left[-\alpha t \left(\frac{n\pi}{d} \right)^2 \right] \quad (2.19)$$

Im einfacheren Fall eines unendlich tiefen Bodens wird Carslaw and Jaeger (1959) vorgeschlagen:

$$G_1(x, t) = \frac{2\sqrt{(\alpha t/\pi)}}{k} \exp \left(-\frac{x^2}{4\alpha t} \right) - \frac{x}{k} \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \quad (2.20)$$

G_2 ergibt sich einfach aus der Symmetrie der Wärmeleitung aus G_1 durch $G_2 = G_1(d - x, t)$, da es keinen Unterschied macht, ob Wärme von oben nach unten oder von unten nach oben geleitet wird.

Zur numerischen Auswertung wird das Integral in Gleichung 2.18 mit der Trapezsumme approximiert. Der kontinuierliche Verlauf von $q(t)$ zwischen t^0 und t^n wird in

q^0, \dots, q^n zerlegt und das Differential der Green-Funktion wird zur endlichen Differenz zwischen zwei Zeitpunkten $\Delta G^j = G(0, t^j) - G(0, t^{j-1})$:

$$\int_{t^0}^{t^n} q(t - \tau) dG(x, \tau) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} [q^{n-j} + q^{n-j+1}] \Delta G^j(x) \quad (2.21)$$

Die mit $\frac{1}{2}$ multiplizierte Klammer in 2.21 kann als Mittelwert des Wärmestroms zwischen den zwei Zeitpunkten gesehen werden und ergibt sich aus der Trapezregel. Zur verkürzten Schreibung wird in Abschnitt 4.3.1

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} [q^{n-j} + q^{n-j+1}] \Delta G^j(x) \equiv \mathbf{q} * \Delta \mathbf{G} \quad (2.22)$$

verwendet, wobei \mathbf{q} der Vektor der Wärmeflüsse $(q^0, \dots, q^n)^T$ ist und $\Delta \mathbf{G}(x)$ analog $(\Delta G^1(x), \dots, \Delta G^n(x))^T$. Das in 2.22 definierte Produkt lässt sich in MATLAB einfach als Skalarprodukt des umgedrehten Vektors der mittleren Wärmeflüsse mit dem Vektor der ΔG umsetzen. In Pseudocode `flipud(q_mean)^T * deltaG`.

2.3 Numerische Methoden

Eine Auswahl an Standardverfahren verwendeter numerischer Methoden wird in diesem Abschnitt nach einem Vorlesungsskriptum für Scientific Computing von Pürer (2014) beschrieben.

2.3.1 Crank-Nicolson-Verfahren

Sei die Ableitung einer Größe u (z.B. der Temperatur) analytisch verfügbar und hänge von sich selbst nichtlinear ab, dann ist eine Lösung meist analytisch nicht möglich. Dies motiviert eine numerische Integration der hier allgemein gehaltenen Differentialgleichung⁸

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad (2.23)$$

⁸ unter Verwendung der Abkürzung $f^n \equiv u'(t^n)$ für die Ableitung zum Zeitpunkt n

welche jedoch zumindest formal integriert werden kann:

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t f(u(\tau)) \, d\tau \quad (2.24)$$

$$= u(t_0) + \widehat{f} \Delta t \quad (2.25)$$

Diese Formulierung mit \widehat{f} , dem Mittelwert der Funktion f im Intervall, ist nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung exakt. Da man den Mittelwert jedoch meist nicht zur Verfügung hat, wertet man die Funktion an beiden Zeitpunkten aus und verwendet dazwischen eine lineare Näherung (Trapezregel). Damit erhält man die sogenannte *Crank-Nicolson Methode*

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{2} [f^n + f^{n+1}] \quad (2.26)$$

mit Diskretisierung $t^n = \{t_0, t_0 + n\Delta t, \dots, t\}$.

Problematisch daran ist die Bestimmung von f^{n+1} , da hierfür u^{n+1} nötig wäre. Das unbekannte u^{n+1} war aber genau das Ziel unserer Berechnung. Damit ist (2.26) eine implizite Gleichung, welche durch ein Iterationsverfahren (siehe nächste Sektion) gelöst werden kann. Alternativ dazu kann $f^{n+1} \equiv f(t^{n+1}, u^{n+1})$ mit Taylor genähert werden: $f^{n+1} \approx f(t^{n+1}, u^n + \Delta t f^n)$. Das ergibt die *Heun Methode* (auch explizite Trapezmethode):

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{2} [f^n + f(t^{n+1}, u^n + f^n \Delta t)] \quad (2.27)$$

Der Fehler eines Zeitschritts der Crank-Nicolson Methode ist durch

$$\frac{(\Delta t)^3}{12} u''(\tau) \quad \text{für ein } \tau \in [t^n, t^{n+1}]$$

gegeben, was einer Achtelung des Fehlers bei einer Halbierung des Zeitschritts bedeutet.

Anforderungen an Zeit- und Raum-Schrittweite: Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung mit dem expliziten FTCS Schema verlangt nach Wang et al. (2010) für numerische Stabilität Zeitschritte $\Delta t < (\Delta x)^2/\alpha$, was für Asphalt bei einer räumliche Auflösung von 1 cm bereits einen Zeitschritt in der Größenordnung 1 s bedeutet. Die implizite Crank-Nicolson Methode ist zwar unabhängig vom Zeitschritt stabil, die Lösung wird aber bei größer werdendem Zeitschritt immer unrealistischer, da die lineare

Näherung der Trapezregel immer schlechter wird.

2.3.2 Fixpunktiteration

Die Fixpunktiteration wird auch Methode der sukzessiven Approximation genannt. Eine nichtlineare Gleichung kann durch die Methode der Fixpunktiteration gelöst werden. Dabei muss die zu lösende Gleichung in die folgende Form gebracht werden:

$$\phi(x) = x \quad (2.28)$$

Das zugehörige Iterationsschema

$$x_{k+1} = \phi(x_k) \quad (2.29)$$

konstruiert eine Folge $\{x_0, x_1, \dots\}$, die unter bestimmten Umständen zu einem Fixpunkt x^* mit $\phi(x^*) = x^*$ konvergiert. Der Fixpunkt ist also eine Lösung der Gleichung.

Definition: Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. ϕ ist eine *Kontraktion* auf I , wenn es ein $0 \leq L < 1$ gibt, sodass

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in I \quad (2.30)$$

Satz: Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\phi : I \rightarrow I$ eine Kontraktion mit Lipschitzkonstante $L < 1$, dann folgt, dass

- ein eindeutiger Fixpunkt x^* von ϕ existiert, d.h. $\phi(x^*) = x^*$,
- für jeden Startwert von $x_0 \in I$ die Fixpunkt-Iteration $x_{k+1} = \phi(x_k)$ nach x^* konvergiert, wobei

$$|x_{k+1} - x_k| \leq L|x_k - x_{k-1}|$$

Praktisches Konvergenzkriterium: Die Bedingung $|L| < 1$ ist natürlich auch dann erfüllt, wenn

$$\sup_{x \in I} |\phi'(x)| < 1. \quad (2.31)$$

Diese Bedingung ist einfacher auszuwerten und wird in Abschnitt 4.3 verwendet um die Konvergenz des Verfahrens zu bestätigen.

Newton-Verfahren

Auch das Newton-Verfahren ist ein Fixpunktverfahren. In der gängigen Notation sucht man jedoch die Nullstelle der Funktion $f(x)$. Das heißt ein x , sodass $f(x) = 0$ unter der Iterationsvorschrift

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2.32)$$

Das entspricht dem iterativen Auffinden eines Fixpunktes

$$x = \Phi(x) \quad (2.33)$$

mit der Fixpunktfunktion

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \quad (2.34)$$

Das zeigt, dass das Newton-Verfahren ein Spezialfall eines Fixpunktverfahrens ist. Es konvergiert im Allgemeinen zwar quadratisch und damit schneller, benötigt jedoch im ersten Iterationsschritt bereits drei Funktionsauswertungen. Im n -Dimensionalen ist die Ableitung eine Matrix mit n^2 Einträgen, was dazu führt, dass der Aufwand quadratisch mit der Anzahl der Dimensionen steigt. Da die geforderte Genauigkeit der Lösung relativ gering ist, der Startwert bereits nahe am Fixpunkt liegt und Funktionsauswertungen rechentechnisch teuer sind, wird in der Umsetzung des Modells auf das Newton-Verfahren verzichtet.

3 Parametrisierungen der Wärmeflüsse

Im Gegensatz zu den primitiven Gleichungen der atmosphärischen Dynamik können Strahlung, Wärmeleitung und Verdunstung/Kondensation nicht am üblichen Gitter der Wettermodelle gelöst werden. Die theoretisch notwendige Gitterauflösung steht aufgrund begrenzter Ressourcen vielfach nicht zur Verfügung, sodass Näherungen angebracht werden müssen. Im Rahmen dieser Arbeit bezeichnet der Begriff Parametrisierung die Näherung schwer mess- und berechenbarer Wärmeflüsse durch vereinfachte Formeln, die nicht unbedingt theoretisch belegt sind, sich jedoch praktisch als nützlich und zweckmäßig erwiesen haben.

3.1 Strahlungsflüsse

Der wichtigste Faktor für die Oberflächentemperatur während des Tages ist wohl die kurzwellige Strahlung. Diese können von einem hochaufgelösten numerischen Modell, oder aber auch durch ein X-Band Wolkenradar zur Verfügung gestellt werden, sodass im besten Fall jede Wolke berücksichtigt werden kann. Für die simulierten Fälle in Kapitel 5 standen Messwerte im Intervall von zehn Minuten zur Verfügung.

Auch die langwellige Gegenstrahlung sollte bei operativer Umsetzung von außen geliefert werden, da sie von der chemischen Zusammensetzung der Atmosphäre abhängt und somit im NWP-Modell bereits enthalten sind. Für die langwellige Gegenstrahlung sind vorwiegend die dreiatomigen Moleküle H_2O , O_3 und CO_2 von entscheidender Bedeutung. Diese können im Gegensatz zu den, den Großteil der Atmosphäre ausmachenden, homonuklearen Molekülen, infrarote Strahlung absorbieren und emittieren. Darüber hinaus beeinflussen auch Aerosole die lang- und kurzwellige Strahlung. Für die ersten IR-aktiven Gase stellt Sass (1997) eine Parametrisierung von Savijärvi (1990) vor. Da Strahlungsparametrisierung im Allgemeinen eine rechentechnisch sehr teure

Angelegenheit sein kann, ist es jedoch sinnvoll, bereits berechnete Werte aus operativen numerischen Wettermodellen zu übernehmen.

Da für die simulierten Fälle keine Messdaten der atmosphärischen Gegenstrahlung zur Verfügung standen, wurde das Modell mit den Parametrisierungen von Burridge & Gadd¹, Stull (2012), Prata et.al., Rost (2004), Brutsaert und Qin and Hiller (2011) unter Verwendung eines entsprechenden Faktors zur Berücksichtigung von Bewölkung (Rost, 2004) betrieben.

3.2 Fluss latenter Wärme

Für den Wärmefluss durch Verdunstung und Kondensation schlägt Sass (1992, 1997) folgende Parametrisierung nach dem Bulk-Ansatz vor:

$$Q_{lat} = L\rho \text{FF} C_s \cdot (q_{air} - q_{sfc}), \quad (3.1)$$

mit der spezifischen Verdampfungswärme L , der Luftdichte ρ , dem Betrag der Windgeschwindigkeit FF in 10 m Höhe, dem dimensionslosen Reibungskoeffizienten C_s und der spezifischen Feuchte am Boden und in einer Höhe a . Der entscheidende Beitrag von Sass ist jedoch die Zurückführung der unbekanntes bodennahen Feuchte auf bekannte Größen, nämlich auf einen dimensionslosen Nässeparameter W^* und auf Lufttemperatur und -feuchte:

$$q_{sfc} = W^* q_{sat}(T_{sfc}) + (1 - W^*) q_{air} \quad (3.2)$$

Ist die Oberfläche total benetzt (entspricht $W^* = 1$), so wird die bodennahe Feuchte q_{sfc} auf die Sättigungsfeuchte $q_{sat}(T_{sfc})$ gesetzt - ist die Oberfläche trocken (entspricht $W^* = 0$), so wird $q_{sfc} = q_{air}$ gesetzt. Der Nässeparameter ist gegeben durch

$$W^* = W/W_{crit} \quad \text{mit } 0 \leq W^* \leq 1 \quad (3.3)$$

wobei W_{crit} einer totalen Benetzung der Oberfläche entspricht.

Die absolute Straßennässe W in kg/m^2 ist durch folgende Bilanzgleichung für den

¹ unter Verwendung von *Opacity*-Messdaten, mit der Annahme eines gleichen Bewölkungsgrades in jeder Höhe

Wasserhaushalt gegeben:

$$\frac{dW}{dt} = \underbrace{\phi_{rain}}_{\text{Zufluss durch Regen}} - \underbrace{\phi_{evap}}_{\text{Verdunstungsfluss}} - \underbrace{C_{ROW}}_{\text{Oberflächenabfluss}} \quad (3.4)$$

Sie beschreibt die Änderung an Wassermasse pro m^2 als Ergebnis von Regen, Verdunstung und Oberflächenabfluss (*Runoff*).

Über Gleichung 3.4 hängt der latente Wärmestrom Q_{lat} auch wieder von sich selbst ab, denn der Verdunstungsfluss $\phi_{evap} = -Q_{lat}/L$. Damit ist Gleichung 3.1 von impliziter Form und nicht ohne Weiteres lösbar.

Mit der Parametrisierung 3.2 nimmt Q_{lat} folgende Form an:

$$Q_{lat} = L(T_{sfc})\rho \text{ FF } C_s W^* (q_{air} - q_{sat}(T_{sfc})) \quad (3.5)$$

Erweiterung für Tau: Die Parametrisierung 3.2 nach Sass (1992, 1997) bewirkt, dass Tau (d.h. $Q_{lat} > 0$) erst ermöglicht ist, wenn $W^* > 0$ und $q_{air} > q_{sat}(T_{sfc})$ ist. Das bedeutet, dass die Oberfläche bereits nass sein müsste, damit Tau fällt. Da dies physikalisch unrealistisch ist, haben Crevier & Delage Crevier and Delage (2001) die Parametrisierung 3.2 erweitert, damit Kondensation (Tau) im Modell auch bei trockener Oberfläche auftreten kann:

$$q_{sfc} = (1 - W^*) \min[q_{air}, q_{sat}] + W^* q_{sat} \quad (3.6)$$

Eingesetzt in den Bulk-Ansatz des latenten Wärmeflusses bedeutet das:

$$Q_{lat} = L\rho \text{ FF } C_s \left\{ \underbrace{(q_{air} - \min[q_{air}, q_{sat}])}_I + \underbrace{W^*(\min[q_{air}, q_{sat}] - q_{sat})}_{II} \right\} \quad (3.7)$$

In Gleichung 3.7 sind zwei wichtige Fälle zu erkennen:

- Ist $q_{air} > q_{sat}(T_{sfc})$, so verschwindet Term *II* und es kommt zu Tau oder Reifablagerung unabhängig vom Nässeparameter W^* .
- Ist $q_{sat}(T_{sfc}) > q_{air}$, so verschwindet Term *I* und es kommt zur Verdunstung oder Sublimation, sofern eine feuchte Oberfläche ($W^* > 0$) vorliegt.

3.3 Bodenwärmefluss

Unter dem Begriff *Bodenwärmestrom* versteht man den Wärmefluss, mit dem Wärme von der Oberfläche weg oder zur Oberfläche hin transportiert wird. Er hängt, wie in Theorieabschnitt 2.1.3 (Glg. 2.7) erklärt, vom Temperaturgradienten und der Konduktivität k am Ort z ab. Da die horizontalen Gradienten typischerweise klein sind, werden diese vernachlässigt, wodurch der Bodenwärmefluss nur durch den vertikalen Gradienten bestimmt wird. Der in der Oberflächenenergiebilanz vorkommende Bodenwärmestrom Q_{gnd} entspricht dem Bodenwärmefluss direkt an der Oberfläche:

$$Q_{gnd} = -k \frac{dT}{dz} \quad (3.8)$$

Je nach Lösungsmethode der Energiebilanz (siehe Abschnitt 4.1) wird diese Gleichung entweder diskretisiert, oder analytisch verwendet.

Anzumerken ist, dass die Konduktivität zeitlich (aufgrund variierender Bodenfeuchte) und räumlich (aufgrund verschiedener Bodentypen und -schichten) im Allgemeinen stark variiert. Im Falle einer näherungsweise wasserundurchlässigen Asphaltfläche ist die zeitliche Variabilität der Konduktivität vernachlässigbar und die vertikale Variabilität durch die Asphaltstruktur am jeweiligen Ort gegeben. Die Modellierung des Bodenwärmeflusses ist damit wesentlich vereinfacht.

3.4 Fluss fühlbarer Wärme

Entsprechend der Theorie der Wärmeübertragung kann der Fluss fühlbarer Wärme als Funktion der Temperaturdifferenz bzw. des Gradienten dargestellt werden. Da in der Luft im Gegensatz zum Boden auch Konvektion möglich ist, funktioniert der Wärmefluss in Luft nicht gleich wie im Boden (siehe Glg. 2.9). Nichtsdestotrotz kann der fühlbare Wärmefluss näherungsweise durch

$$Q_{sens} = h_{conv}(T_{air} - T_{sfc}) \quad (3.9)$$

angesetzt werden, wobei h_{conv} der Wärmeübergangskoeffizient ist, welcher nach Qin and Hiller (2011) aus zwei Summanden, jeweils für freie und für erzwungene Konvek-

tion besteht:

$$h_{conv} = 5.6 + 5.1974 \cdot \sqrt{FF}$$

3.5 Weitere Wärmeflüsse

Wärmefluss bei Regen

Fällt Regen, so wird die Oberfläche durch den Temperaturunterschied zum Regentropfen abgekühlt bzw. aufgeheizt. Die Parametrisierung des zugehörigen Wärmeflusses ist nach Flament and Sawyer (1995):

$$Q_{rain} = c_w \rho_w \phi_{rain} (T_{wet} - T_{sfc}) \quad (3.10)$$

wobei c_w , ρ_w und ϕ_{rain} die Wärmekapazität und Dichte des Wassers, sowie die Regenintensität in m/s sind².

Die Temperatur eines gefallenen Regentropfens liegt in etwa bei der Feuchttemperatur in Bodennähe (Anderson et al., 1998). Dies lässt sich dadurch erklären, dass sich ein Gleichgewicht zwischen Verdunstung und Kondensation am Tropfen ausbildet und die Anpassungszeit an die unterschiedlichen Verhältnisse in den durchflogenen Luftschichten gering ist.

Phasenübergangswärme

Die Verdunstung oder Kondensation ist bereits im latenten Wärmefluss enthalten, ebenso die (Re-)Sublimation von gefrorenem Wasser, falls dieses modelliert wird. Es besteht jedoch auch die Möglichkeit, dass Flüssigwasser anfriert oder Schnee und Eis schmelzen.

Ein Spezialfall liegt vor, wenn ein Regentropfen durch Luft mit Feuchttemperatur unter dem Gefrierpunkt fällt. Trotz seiner Temperatur gefriert er unter Umständen erst beim Auftreffen auf eine Oberfläche - womit auch die freiwerdende Gefrierwärme erst zu diesem Zeitpunkt schlagend wird.

Die bei allen Prozessen freiwerdende/entzogene Wärme wird in dieser Arbeit nicht berücksichtigt.

² Die Regenintensität in m/s entspricht m³ Regenwasservolumen pro m² Bezugsfläche pro Sekunde

4 Prognosemodelle

4.1 Beschreibung der Modelle

4.1.1 Kategorisierung

Um sich einen Überblick über die in dieser Arbeit behandelten Prognosemodelle zu verschaffen, bietet sich eine Klassifizierung nach

- mathematischen Lösungsmethoden und
- physikalischen Gesichtspunkten bzw. der verwendeten Form der Energiebilanz

an. Wenngleich die physikalische Kernaussage eines jeden behandelten Modells die Energieerhaltung ist, so lässt sich diese Aussage verschieden formulieren: Einerseits als Bilanzgleichung für ein Volumen (unter Berücksichtigung eines Speicherterms), oder aber auch für eine Fläche, für die die Energieerhaltung nichts anderes aussagt, als dass die Summe aller (gerichteten) Energieflüsse null ergeben muss.

Die mathematischen Lösungsmethoden reichen von der algebraischen Lösung quartischer Gleichungen bis hin zur analytischen oder numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen. Bei Letzteren kann unterschieden werden, ob nur Ableitungen nach der Zeit diskretisiert werden, oder auch räumliche Ableitungen genähert werden.

Charakterisierung:

- Polynom-Modell
 - physikalisch: Energiebilanzformulierung für eine Fläche
 - mathematisch: Lösung der Energiebilanzgleichung nach der Temperatur als quartische Gleichung (Polynom vierten Grades ebendieser)

- Räumlich diskretes Modell
 - physikalisch: Energiebilanzformulierung für ein Volumen (oberste Zentimeter des Bodens)
 - mathematisch: Lösung der Energiebilanzgleichung nach der Temperatur über den Speicherterm, welcher durch die Summe von oben einwirkender Wärmeflüsse gesteuert wird. Der Bodenwärmestrom wird durch räumliche Diskretisierung der oberflächennahen Erdschichten berechnet.
- Räumlich analytisches Modell
 - physikalisch: Energiebilanzformulierung für eine Fläche,
 - mathematisch: Lösung der Energiebilanzgleichung nach dem Bodenwärmestrom, welcher im analytischen Wärmeleitungsmodell (Wang et al., 2010) zur Berechnung der Temperatur verwendet wird.

4.1.2 Parallelisierbarkeit

Es existieren Probleme, welche inhärent sequentiell sind. Das heißt, dass diese Probleme nur sequentiell gelöst werden können. Ein Beispiel dafür ist die numerische Integration mittels Euler-Vorwärts-Schema: $T^{n+1} = T^n + f(T^n)\Delta t$. Die Temperatur zum nächsten Zeitpunkt ist unmittelbar abhängig von der Temperatur zum vorherigen Zeitpunkt. Ohne diese Information ist die Berechnung von T^{n+1} unmöglich.

Demgegenüber existieren jedoch auch Aufgaben, die voneinander unabhängig sind, und daher parallel abgearbeitet werden können. Ein Beispiel dafür ist die Berechnung der Niederschlagssumme aus stündlichen Werten für jeden Punkt eines Gitters. Die Summe an einem Gitterpunkt hängt nicht von einem anderen Gitterpunkt ab.

Um eine sequentielle Berechnung schneller abzuarbeiten, wurde in den letzten Jahrzehnten die Taktfrequenz von Prozessoren stetig erhöht. Da dies jedoch aus physikalischen Gründen eine Grenze hat, versucht man seit etwa dem Jahr 2000 so viele Probleme wie möglich parallel, das heißt mit mehreren Prozessoren gleichzeitig, abzuarbeiten.

Unter gewissen Umständen lassen sich sogar von einander abhängige Probleme parallelisieren. In guter Näherung ist beispielsweise die horizontale Wärmeleitung gegenüber der vertikalen Wärmeleitung im Boden zu vernachlässigen. Dies entkoppelt die jeweiligen Gleichungen und ermöglicht eine parallele Berechnung der Oberflächentemperaturen.

Abschließend ist also anzumerken, dass die numerische Lösung von Anfangswertproblemen der Art $y'(t) = f(y(t))$, $y(t_0) = y_0$ inhärent sequentiell ist. In diese Kategorie fällt auch die Force-Restore Methode (Bhumralkar, 1975). Sie bietet den Vorteil einer konstanten, d.h. $\mathcal{O}(1)$ -Komplexität im Vergleich zur $\mathcal{O}(N^3)$ -Komplexität¹ für N -Schichten bei numerischer Lösung der Wärmeleitungsgleichung², da sie statt N Schichten nur eine tiefere Bodenschicht modelliert.

4.1.3 Formulierungen der Energiebilanz

Das zentrale physikalische Argument zur Berechnung der Oberflächentemperatur aus Umgebungsfaktoren ist die Energieerhaltung. Diese ist bereits in Abschnitt 2.4 besprochen worden und ist auf zwei Varianten anwendbar:

- als Energiebilanz einer Fläche (der Oberfläche), oder
- als Energiebilanz eines Volumens (der oberflächennahen Bodenschicht)

Energiebilanz eines Volumens

Die Energieerhaltung für ein Volumen folgt direkt aus Gleichung 2.4, welche die lokale Form der Energieerhaltung darstellt. Integration über eine Fläche dA und eine Tiefe dz führt zur integralen Form:

$$\iiint_V \left(\rho \frac{du}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q} \right) dA dz = 0 \quad (4.1)$$

Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes kann die Wärmeflussdivergenz als Skalarprodukt des Wärmeflussvektors \mathbf{q} mit dem Oberflächennormalvektor \mathbf{n} geschrieben werden. Der Operator $\overline{(\cdot)}$ ist das Volumsmittel:

$$\overline{\rho \frac{du}{dt}} \Delta V + \oint_{\sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (4.2)$$

Wenn die horizontalen Wärmeflüsse null sind und die flächengemittelte, vertikale, nach unten gerichtete Komponente von \mathbf{q} an der Oberseite durch q_1 und an der Unterseite durch q_2 gegeben ist, gilt weiters: $\oint_{\sigma} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA = (q_1 - q_2) \Delta A$.

Die Wärmeflüsse an der Oberseite lassen sich als Strahlungsfluss Q_{Rn} , fühlbarer und latenter Wärmefluss Q_H, Q_E , identifizieren: $q_1 = Q_{Rn} + Q_H + Q_E$. Der Wärmefluss

¹ Inversion des Gleichungssystems bzw. Diagonalisierung

² Beide Angaben beziehen sich auf einen Zeitschritt

an der Unterseite sei alleine durch den Bodenwärmefluss gegeben: $q_2 = -Q_G$. Der Zusammenhang der inneren Energie u mit der Temperatur wird durch die spezifische Wärmekapazität c geleistet: $du = c dT$. Nach Division durch die Fläche ΔA schreibt sich Gleichung 4.2 als

$$\overline{\rho c \frac{dT}{dt}} \Delta z + \sum_i Q_i = 0. \quad (4.3)$$

mit

$$\sum_i Q_i = Q_{Rn} + Q_H + Q_E + Q_G \quad (4.4)$$

Energiebilanz einer Fläche

Angewandt auf die Oberfläche degeneriert das Volumen zu einer Fläche ($\Delta V \rightarrow 0$), wodurch der erste Term in 4.2 verschwindet. Dadurch geht $\Delta z \rightarrow 0$, sodass $q_1 \rightarrow q_2$ folgt. Das Resultat ist schon aus Abschnitt 2.1.3 bekannt: Der Wärmefluss darf räumlich keine Sprünge aufweisen. Da an der Oberfläche keine Energie verschwinden kann, müssen sich alle Wärmeflüsse auf Null ergänzen:

$$\sum_i Q_i = 0. \quad (4.5)$$

oder

$$Q_{Rn} + Q_H + Q_E + Q_G = 0, \quad (4.6)$$

mit dem Strahlungsfluss Q_{Rn} , dem Fluss fühlbarer Wärme Q_H und latenter Wärme Q_E .

Die Temperatur T der Oberfläche lässt sich aus Gleichung 4.6 auf zwei Arten bestimmen:

- Lösung als maximal quartisches Polynom von T , wenn alle Koeffizienten bekannt sind (Abschnitt 4.2)
- Auflösung auf den Bodenwärmestrom, wenn alle restlichen Wärmeflüsse bekannt sind; Der zeitliche Verlauf des Bodenwärmestroms ermöglicht nach Wang et al. (2010) die Vorhersage des zeitlichen Temperaturverlaufes im Boden, sofern das anfängliche räumliche Temperaturprofil bekannt ist (Abschnitt 4.3)

Hinweis: Es sei darauf hingewiesen, dass der Bodenwärmefluss Q_G in beiden Formulierungen verschieden ist: In der Formulierung für die Oberfläche (Glg. 4.6) ist es

der konduktive Wärmefluss der direkt an der Oberfläche vorliegt ($-k\partial T/\partial z|_{z=0}$), während in Gleichung 4.2 der Fluss an der Unterseite der Oberflächenschicht gemeint ist ($-k\partial T/\partial z|_{z=\Delta z}$).

4.2 Polynom-Modell

Wie im letzten Abschnitt erklärt, verlangt die Energieerhaltung die Stetigkeit des Energieflusses. Angewandt auf die Oberfläche heißt das, dass sich dort alle Wärmeflüsse auf Null ergänzen.

Zur Lösung wird die Energiebilanz der Oberfläche als Summe einzelner Wärmeflüsse Q_i betrachtet (Glg. 4.6)

$$\sum_i Q_i = 0,$$

wobei eine Vielzahl dieser Flüsse Q_i von der Oberflächentemperatur T_{sfc} abhängen, d.h. als Polynom geschrieben werden können:

$$Q_i = \sum_n^N (a_i)_n \cdot (T_{sfc})^n \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.7)$$

Kennt man die Koeffizienten a_i , so kann eine direkte algebraische Lösung gefunden werden. Die einzige Einschränkung ist, dass in jedem Summanden die Abhängigkeit der Oberflächentemperatur T_{sfc} maximal vierter Ordnung ist. Die in dieser Arbeit behandelten Parametrisierungen bestehen nur aus zwei Summanden ($N = 2$), von denen einer proportional $(T_{sfc})^0$ also konstant ist. Damit ist ein Wärmefluss Q_i von der Form

$$Q_i = c_i + a_i(T_{sfc})^n, \quad n \in \{1, 2, 3, 4\}$$

mit der Konstanten³ c_i und einem Koeffizienten a_i .

4.2.1 Parametrisierungen

Eine explizite Lösung der Energiebilanz ist innerhalb des (nichtiterativen) Polynom-Modells, wie erwähnt, nur möglich, wenn jeder Fluss als Polynom vierter Ordnung dargestellt werden kann.

³ genauer: nicht von T_{sfc} abhängig, jedoch durchwegs von anderen Temperaturen abhängig, z.B. der Lufttemperatur

Strahlungsflüsse

Der langwellige Strahlungsfluss hängt nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz ausschließlich von der vierten Potenz der Oberflächentemperatur ab. Daher ist jede derartige Parametrisierung kompatibel mit der mathematischen Lösungsmethode.

Bodenwärmefluss

Für den Bodenwärmefluss bietet sich im Polynom-Modell die diskretisierte Form des Fourier Ansatzes (2.7) an, da dieser zu einer linearen Abhängigkeit des Bodenwärmeflusses von der Oberflächentemperatur führt:

$$Q_G = a(T_{gnd} - T_{sfc}) \quad (4.8)$$

Der Koeffizient a ist gegeben durch k/d , mit der Konduktivität k [W/(m K)] und der Tiefe d , in welcher die Bodentemperatur T_{gnd} vorliegt.

Fluss fühlbarer Wärme

Am Fluss fühlbarer Wärme wird keine Änderung gegenüber Abschnitt 3 vorgenommen, da dieser bereits eine lineare Funktion der Oberflächentemperatur ist und damit die Bedingungen zur algebraischen Lösung erfüllt. Der Proportionalitätsfaktor zwischen Temperaturdifferenz und Wärmefluss ist der Wärmeübergangskoeffizient. (Siehe Gleichung 3.9)

Fluss fühlbarer Wärme durch Regen

Ebenso wird am Fluss fühlbarer Wärme, der durch die Wärmeleitung zu gefallenem Regenwasser entsteht Q_{rain} , keine Änderung vorgenommen, da dieser bereits eine lineare Funktion der Oberflächentemperatur ist. (Siehe Gleichung 3.10)

Fluss latenter Wärme

Basierend auf Sass (1992, 1997) (Abschnitt 3.2) wird eine Parametrisierung für den latenten Wärmefluss vorgeschlagen. Zur Lösung sollen alle allgemein nichtlinearen, Oberflächentemperatur-abhängigen Terme durch ein Polynom ≤ 4 . Ordnung gefittet werden. Um dies direkt zu sehen, wird der Ausdruck des latenten Wärmeflusses (Glg.

3.5) in Abhängigkeiten der Oberflächentemperatur T zerlegt,

$$Q_E(T) = a[L(T) - L(T)q_{sat}(T)], \quad (4.9)$$

wobei a eine reelle Konstante, L die spezifische Verdampfungswärme und q_{sat} die spezifische Feuchte bei Sättigung ist. Letztere sind die einzigen Parameter mit nennenswerter Temperaturabhängigkeit.

Je nach Formulierung des latenten Wärmestroms nach Qin and Hiller (2011), Sass (1992, 1997) oder Stensrud (2009) ist der Faktor a etwas verschieden.

Zur praktischen Umsetzung in dieser Arbeit wurde Sass und Qin & Hiller verglichen. Mit $C_s = C_p$ und $FFc_p\rho C_s = h_{conv}$ ergibt sich $C_s = h_{conv}/(FFc_p\rho)$ aus dem Wärmeübergangskoeffizient h_{conv} nach Qin and Hiller (2011), wodurch sich der Faktor a zu h_{conv}/c_p bestimmt.

Untersuchung der Nichtlinearität: Sowohl die Verdampfungswärme L als auch die Sättigungsfeuchte q_{sat} sind nichtlinear von der (Oberflächen-)Temperatur abhängig. Die Abhängigkeit der Verdampfungswärme von der Temperatur ist näherungsweise dritter Ordnung (siehe Anhang) und stellt damit kein Problem für die Polynom-Lösung dar. Die Sättigungsfeuchte q_{sat} ist jedoch kein einfaches Polynom und muss daher genähert werden.

Würde nun in Gleichung 4.9 jeweils für L und q_{sat} eine Polynomnäherung gesucht, dann würde das Produkt eine höhere Ordnung bilden. Um höhere als vierte Ordnungen der Temperatur in Gleichung 4.9 zu vermeiden, muss das Produkt $L(T)q_{sat}(T)$ genähert werden. Die Polynom-Näherung

$$Lq_{sat} \approx c_0 + c_1T + c_2T^2 + c_3T^3 + c_4T^4 \quad (4.10)$$

wurde mittels Matlab-Funktion `polyfit()` mit den Zahlenwerten

$$\begin{aligned} c_0 &= 40604085, \quad c_1 = -608010, \\ c_2 &= 3427.65865486001, \quad c_3 = -8.62684520887643 \text{ und} \\ c_4 &= 8.18379716102154 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

gefunden. Der Sättigungsdampfdruck wurde nach Goff (1957) bestimmt⁴. Die Näherung des Produkts $L(T)q_{sat}(T)$ zeigte im Bereich von -5°C bis 40°C einen maximalen relativen Fehler $< 0.5\%$. Um eine Abschätzung des maximalen Fehlers des latenten

⁴ siehe Appendix A

Wärmefflusses zu bekommen, wurden typische Werte für die atmosphärischen Parameter gewählt. Bei 10 m/s Wind liegt das Maximum des Fehlers von Q_E im Temperaturbereich von -10 bis $+40$ °C durch die Polynomapproximation bei < 2 W/m².

Mithilfe der Näherungen für $L(T)^5$ und $L_{q_{sat}}$ (4.10) kann die latente Wärme Q_E (4.9) in Potenzen der Oberflächentemperatur T geschrieben werden:

$$Q_E = a [b_0 + b_1T + b_2T^2 + b_3T^3 - (c_0 + c_1T + c_2T^2 + c_3T^3 + c_4T^4)] \quad (4.11)$$

Nicht zeitlich-iterative Bestimmung von W

Da die Differentialgleichung für $W(t)$ (3.4) inhärent sequentiell zu lösen ist, muss eine Näherungslösung gefunden werden: Dazu werden vereinfachende Annahmen getätigt, die eine analytische Integration ermöglichen.

Die Änderung der Straßennässe $W(t)$, sei gegeben durch

$$\frac{dW}{dt} = -c_{RO}W(t) + \phi(t, W(t)), \quad (4.12)$$

wobei der erste Term den Ablauf (*Runoff*) von Oberflächenwasser beschreibt und der zweite Term die Summe aus Verdunstung und Niederschlag darstellt. Der zweite Term ist aufgrund der Verdunstung problematisch, da diese nämlich implizit vom Nässeparameter W abhängt. Diese unbekannte Nichtlinearität soll vermieden werden.

Um das Problem zu vereinfachen, soll nun angenommen werden, dass ϕ rein zeitabhängig ist. Für diesen Fall ist die Lösung:

$$W(t) = e^{-c_{RO}t} \left(\int_0^t e^{c_{RO}t} \phi(t) dt + W(0) \right) \quad (4.13)$$

Die Fallunterscheidung bei der Bestimmung von W^* wurde mit der Formel

$$W^* = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{W}{W_{crit}} - \left| \frac{W}{W_{crit}} - 1 \right| \right) \quad (4.14)$$

umgesetzt. Damit ist W^* für $W > W_{crit}$ auf Eins beschränkt.

⁵ siehe Appendix

4.2.2 Lösungsverfahren

Die Energiebilanzgleichung besteht aus der Summe aller Wärmeflüsse

$$0 = Q_G + Q_H + Q_E + Q_{rain} + Q_{Rn,lw} + Q_{Rn,sw} \quad (4.15)$$

welche als Polynome der Oberflächentemperatur T_{sfc} vorliegen müssen. Zur Berechnung der Lösung wird ein Koeffizientenvergleich von Glg. 4.15 mit der allgemeinen Form eines Polynoms

$$0 = AT^4 + BT^3 + CT^2 + DT + E \quad (4.16)$$

durchgeführt. Die Lösung T ergibt sich durch Anwendung des Lösungsverfahrens für Polynome vierter Ordnung und ist in einschlägiger Literatur nachzulesen.

Anmerkung: Von den theoretischen vier Lösungen sind zwei negativ, und dadurch keine realistische Lösung für die Temperatur. Die übrigen zwei (positiven) Lösungen sollten übereinstimmen, da die komplex konjugierte einer reellen Zahl ident zu sich selbst ist.

4.3 Räumlich analytisches Modell

Der grundlegende Unterschied eines räumlich analytischen zu einem räumlich diskreten Modell ist der Übergang von Mitteltemperaturen endlicher Schichten zu einem kontinuierlichen Temperaturprofil. Der dafür gezahlte Preis ist konstante Konduktivität.

Wang et al. (2010) stellt eine Methode vor, die es ermöglicht, die Temperatur im Boden (und damit auch an der Oberfläche) allein aus dem zeitlichen Verlauf des Bodenwärmestroms Q_G zu bestimmen:

$$T(z, t) = f(Q_G(t))$$

Der Bodenwärmestrom wiederum lässt sich aus der Oberflächenenergiebilanz ausdrücken, d.h. aus den anderen Wärmeflüssen:

$$Q_G = f(Q_E, Q_H, Q_{Rn})$$

Unter ihnen auch der Fluss latenter Wärme, welcher vom Nässeparameter W und der Oberflächentemperatur T abhängt (siehe Abschnitt 3.2, Glg. 3.5):

$$Q_E = f(T, W)$$

Die Entwicklung des Nässeparameters W (Glg. 3.4) hängt wiederum vom latenten Wärmefluss ab:

$$W = f(Q_E)$$

Die oberste Gleichung (Wang et al., 2010) wird implizit diskretisiert, die anderen explizit. Im Folgenden werden die konkreten Gleichungen, sowie eine Lösungsmethode präsentiert.

Anmerkung: Für den Bodenwärmestrom wird das Symbol q nach Wang et al. (2010) verwendet. Ausnahme bildet die Energiebilanz, in der aus Konsistenz das Symbol Q_G steht. Die spezifische Feuchte ist mit q_{sat} bzw. q_{air} bezeichnet.

Temperaturgleichung: Nach der Vorhersagegleichung von Wang et al. (2010) für die Temperatur (2.18), muss der Bodenwärmestrom (an der Oberfläche) zeitlich inte-

griert werden:

$$T(x, t) = T(x, 0) + \int_0^t q(t - \tau) dG(x, \tau) \quad (4.17)$$

Diskretisiert man diese Gleichung mit der Trapezregel vom Zeitpunkt t^{n-1} zum Zeitpunkt t^n , so muss die Energiebilanz der Oberfläche (Glg. 4.6) zur Bestimmung von q zu beiden Zeitpunkten (q^{n-1}, q^n) gelöst werden. Da die Temperatur zum Zeitpunkt t^{n-1} als bekannt vorausgesetzt wird, ist q^n die einzige Unbekannte:

$$T^n = f(q^n) \quad (4.18)$$

Die mathematischen Grundlagen zur analytischen Lösung mit Greenschen Funktionen wurden in Abschnitt 2.2 besprochen.

Die zeitlich diskretisierte Form von 4.17 für $T(x = 0, t = t^n) \equiv T^n$ lautet mit der Trapezregel wie in Glg. 2.21:

$$T^n = T^0 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [q^{n-i} + q^{n-i+1}] \Delta G^i(x) \quad (4.19)$$

Das bedeutet, dass die Oberflächentemperatur im Zeitindex fortschreitend bestimmt werden kann, wenn die Anfangstemperatur T^0 und die Bodenwärmeströme bis zum aktuellen Zeitpunkt t^n , das heißt q^0 bis q^n , bekannt sind.

Bodenwärmestrom: Der Bodenwärmestrom lässt sich aus der Energiebilanz der Oberfläche

$$Q_G + Q_H + Q_E + Q_{Rn} = 0$$

als Restglied über die restlichen Wärmeflüsse bestimmen:

$$Q_G = - \underbrace{(Q_H + Q_E + Q_{Rn})}_{\equiv Q_{Rest}} \quad (4.20)$$

Für diese wurden in Abschnitt 3 Parametrisierungen gefunden, welche von Temperatur und Nässeparameter zum Zeitpunkt t^n abhängen. Daher gilt ($q \equiv Q_G$):

$$q^n = f(T^n, W^n) \quad (4.21)$$

Nässeparameter: Um den Nässeparameter zu bestimmen, muss die differentielle Haushaltsgleichung des Nässeparameters (3.4) gelöst werden. Mit dem integralen Mit-

telwert $\overline{(\cdot)}$ gilt:

$$W^n - W^{n-1} = \overline{\frac{dW(t)}{dt}} \Delta t = \overline{[\phi_{rain}(t) - \phi_{evap}(t) - \phi_{RO}(t)]} \Delta t \quad (4.22)$$

Nach der Linearität des Integrals ist der Mittelwert mehrerer Terme gleich der Summe der Mittelwerte

$$\overline{[\phi_{precip}(t) - \phi_{evap}(t) - \phi_{RO}(t)]} = \overline{\phi_{precip}(t)} - \overline{\phi_{evap}(t)} - \overline{\phi_{RO}(t)} \quad (4.23)$$

Wobei der Mittelwert $\overline{(\cdot)}$ nur eine Notation ist für:

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\int_{t^{n-1}}^{t^n} \phi_{precip}(t) dt - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \phi_{evap}(t) dt - \int_{t^{n-1}}^{t^n} \phi_{RO}(t) dt \right) \quad (4.24)$$

1. Das erste Integral in 4.24 ist die Menge an Niederschlag, die zwischen zwei Zeitpunkten gefallen ist. Das ist auch jene Quantität die gemessen und vorhergesagt wird. Dafür wird die Bezeichnung ΔW_{precip}^n gewählt: Zuwachs an W [kg/m²] durch Niederschlag zwischen den Zeitpunkten t^{n-1} und t^n .
2. Das zweite Integral in Glg. 4.24 ist die Menge an verdunstetem Wasser und gleich dem latenten Wärmefluss Q_E geteilt durch die Verdampfungswärme L .
3. Der dritte Term bezeichnet die Menge Wasser, die durch Oberflächenabfluss verloren ging (siehe Parametrisierung in Glg. 3.4).

Beide modellierten Terme, 2. und 3., werden mit Euler-Vorwärts diskretisiert. Das ergibt die finale explizite Form:

$$W^n = W^{n-1} + \Delta W_{precip}^n - \frac{Q_E^{n-1}}{L(T^{n-1})} - c_{RO} W^{n-1} \quad (4.25)$$

Fixpunktgleichung

Die Lösung der Oberflächentemperatur wird durch die Gleichungen 4.19, 4.20, sowie die jeweiligen Parametrisierungen der Wärmeflüsse festgelegt. Wenn man die Parametrisierungen in 4.20 einsetzt und das Ergebnis wiederum in 4.19 einsetzt, erhält man eine Fixpunktgleichung (siehe Abschn. 2.3.2)

$$T^n = f(T^n) \quad (4.26)$$

die mithilfe der Fixpunktiteration gelöst werden kann. Numerische Experimente mit den zur Verfügung gestellten Testdaten (Abschn. 5.1) haben gezeigt, dass eine simple Fixpunktiteration zu einer physikalisch sinnvollen Lösung konvergiert.

Lösung des Systems: Dass eine beliebige Fixpunktiteration konvergiert, ist jedoch nicht von vornherein klar. Es wäre möglich, dass die Rekursionsvorschrift $x_k = \phi(x_{k-1})$ zwar manchmal zu einer Lösung konvergiert, aber unter bestimmten Umständen divergiert. Wie in Abschnitt 2.3.2 erklärt, konvergiert die Iteration, wenn $|\frac{d\phi}{dT}| < 1$ ist. Um diese Bedingung im vorliegenden Beispiel zu zeigen, müssten nun beide Fixpunktgleichungen analytisch abgeleitet werden. Davon wurde abgesehen und alternativ $\frac{\Delta\phi}{\Delta T}$ mit Testdaten numerisch bestimmt (Abschnitt 5.1). Dabei lag $\frac{\Delta\phi}{\Delta T}$ zwischen 0.05 und 0.5, was bedeutet, dass bereits nach einer Iteration eine Genauigkeit zwischen 0.05 K und 0.5 K erreicht wird, wenn die Schätzung für T anfangs um 1 K daneben lag. Das Verfahren ist also zur Lösung der Gleichung geeignet.

Pseudocode: Als Startwert der Iteration wird in erster Näherung von Persistenz ausgegangen ($T^{n+1} \approx T^n$). Diese Temperatur wird in die Fixpunktgleichung zusammen mit den vorgegebenen Umgebungsvariablen wie der Lufttemperatur und -feuchte, Windstärke und Regenrate eingesetzt. Bei rekursiver Iteration nähert sich das Ergebnis immer weiter der wahren Oberflächentemperatur an⁶. Sobald die gewünschte Genauigkeit von z.B. 0.1 Kelvin erreicht ist, kann die Iteration abgebrochen werden:

⁶ In diesem Zusammenhang ist die wahre Temperatur die, die die Fixpunktgleichung exakt erfüllt.

Algorithm 1: Berechnung der Oberflächentemperatur im Ein-Schichten-Modell

```

Data: Anfangstemperatur  $T(0)$ 
Result: Array der Oberflächentemperaturen  $T(:)$ 
 $\varepsilon \leftarrow 0.1$  Kelvin ; // geforderte Genauigkeit
 $Q_{Rest}(0) \leftarrow f(T(0))$  ; // aus Parametrisierungen
 $q(0) \leftarrow -Q_{Rest}(0)$  ;
for  $n \in \{1, \dots, N_{timesteps}\}$  do
   $T1 \leftarrow \text{Fixpkt}(T(n-1), q)$  ; // 1. Iteration
   $T2 \leftarrow \text{Fixpkt}(T\_guess1, q)$  ; // 2. Iteration
   $i \leftarrow 0$  ;
  while  $|T2 - T1| > \varepsilon \ \& \ i < 10$  do
     $i \leftarrow i + 1$  ;
     $T1 \leftarrow T2$  ;
     $T2 \leftarrow \text{Fixpkt}(T1, q)$  ; // erneute Iteration
  end
   $T(n) \leftarrow T2$  ; // beste Approximation speichern
   $Q_{Rest}(n) \leftarrow f(T(n))$  ; // aus Parametrisierungen
   $q(n) \leftarrow -Q_{Rest}(n)$  ; // beste Approx. von  $q$ 
end

```

Algorithm 2: Fixpkt(T) - Iteration der Fixpunktgleichung

```

Data: Schätzung der Oberflächentemperatur  $T0$ ; bisherige Wärmeflüsse  $q(:)$ ;
  Umgebungsfaktoren wie Strahlung, Lufttemperatur, Niederschlag, ...
Result: Nähere Approximation der Oberflächentemperatur  $T1$ 
 $Q_{Rest} \leftarrow f(T0)$  ; // aus Parametrisierungen
 $q0 \leftarrow -Q_{Rest}$  ;
 $T1 \leftarrow f(q(:), q0)$  ; // Glg. 4.19

```

4.3.1 Erweiterung auf mehrere Schichten

Dem Modell liegt die Annahme zugrunde, dass N -Schichten mit jeweils konstanter Wärmeleitfähigkeit vorliegen (siehe Abb. 4.1). Die Dicke der i -ten Schicht sei d_i .

Im Folgenden beziehen sich Superskripte weiterhin nur auf den Zeitindex, während Subskripte sich auf den Index der Schicht beziehen. Außerdem werden die Abkürzungen $T_i(x = 0, t = t^n) \equiv T_i^n$ und $q_i(0, t^n) \equiv q_i^n$ eingeführt.

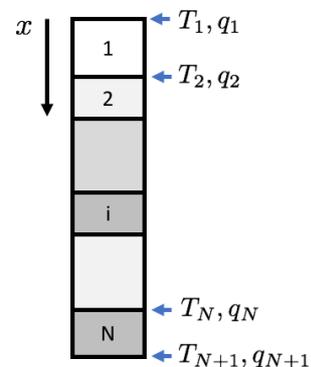


Abbildung 4.1:
Mehrschichten-Modell

An den inneren Grenzflächen gelten die *Kontaktbedingungen*

$$T_i(d_i) = T_{i+1}(0) \quad (4.27a)$$

$$q_i(d_i) = q_{i+1}(0) \quad (4.27b)$$

was einer perfekten Wärmeleitung ("*perfect thermal contact*", vgl. Carslaw and Jaeger (1959)) und stetigem Wärmefluss- und Temperaturverlauf entspricht.

Lösung: Es soll nun ein lineares Gleichungssystem in den Wärmeflüssen $(q_1^n, \dots, q_{N+1}^n)$ zum Zeitpunkt t^n aufgestellt und gelöst werden. Der Wärmefluss ist nach Wang et al. (2010)⁷

$$q_i(0, t) = -k_i \left[\int_{t_0}^t q_i(t - \tau) dG'_i(0, \tau) - \int_{t_0}^t q_{i+1}(t - \tau) dG'_i(d_i, \tau) \right] \quad (4.28)$$

bzw. in diskretisierter Form (Glg. 2.21 mit Abkürzung 2.22)⁸

$$q_i^n = -k_i \left[\mathbf{q}_i * \Delta \mathbf{G}'_i(0) - \mathbf{q}_{i+1} * \Delta \mathbf{G}'_i(d_i) \right] \quad (4.29)$$

Das bedeutet, dass sich der Wärmefluss an der darunterliegenden Grenzfläche q_{i+1} auf den Wärmefluss q_i auswirkt. Nachdem die Wärmeleitung aber nicht richtungsabhängig ist, sollte der Wärmefluss q_i aber ebenso vom Wärmefluss an der oberen Grenzfläche q_{i-1} abhängen. Die entsprechende Gleichung wird nun hergeleitet.

Symmetrische Form: Um q_i von q_{i-1} abhängig zu machen, wird die Gleichung von Wang et al. (2010) (4.28) für $x = d_i$ erneut angeschrieben:

$$q_i(d_i, t) = -k_i \left[\int_{t_0}^t q_i(t - \tau) dG'_i(d_i, \tau) - \int_{t_0}^t q_{i+1}(t - \tau) dG'_i(0, \tau) \right] \quad (4.30)$$

Dabei zeigt sich, dass der untere Rand ($x = d_i$) der Schicht i dem oberen Rand der Schicht $i + 1$ entspricht. Die Kontaktbedingung (4.27b) fordert daher Gleichheit der Wärmeflüsse:

$$q_i(d_i, t) = q_{i+1}(0, t) \quad (4.31)$$

⁷ G' bedeutet die räumliche Ableitung der Green-Funktion: $G' = \partial G / \partial x$

⁸ nach Definition 2.22 kann mit $\mathbf{a} * \mathbf{b}$ ähnlich wie mit einem Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ gerechnet werden

Damit ist der Wärmefluss am rechten Rand der Schicht i (siehe Abb. 4.2)

$$q_{i+1}^n = -k_i \left[\mathbf{q}_i * \Delta \mathbf{G}'_i(d_i) - \mathbf{q}_{i+1} * \Delta \mathbf{G}'_i(0) \right] \quad (4.32)$$

abhängig vom Wärmefluss des linken Randes der Schicht i . Nachdem dies für jede Schicht gilt, kann eine Indexverschiebung $i \rightarrow i - 1$ durchgeführt werden:

$$q_i^n = -k_{i-1} \left[\mathbf{q}_{i-1} * \Delta \mathbf{G}'_{i-1}(d_{i-1}) - \mathbf{q}_i * \Delta \mathbf{G}'_{i-1}(0) \right] \quad (4.33)$$

Diese Gleichung koppelt q_i mit dem linken Wärmefluss q_{i-1} , während Glg. 4.29 q_i mit dem rechten Wärmefluss q_{i+1} koppelt (siehe Abb. 4.3).

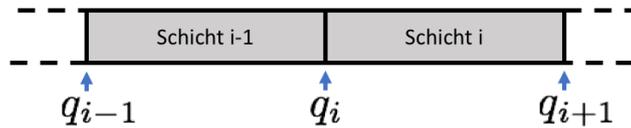


Abbildung 4.3: Position der Wärmeflüsse q_i im Schichtenmodell

Nun setzen wir beide Formulierungen, 4.33 für q_{i-1} und 4.29 für q_{i+1} , ein,

$$q_i^n = q_i^n \quad (4.34)$$

$$-k_{i-1} \left[\mathbf{q}_{i-1} * \Delta \mathbf{G}'_{i-1}(d_{i-1}) - \mathbf{q}_i * \Delta \mathbf{G}'_{i-1}(0) \right] = -k_i \left[\mathbf{q}_i * \Delta \mathbf{G}'_i(0) - \mathbf{q}_{i+1} * \Delta \mathbf{G}'_i(d_i) \right] \quad (4.35)$$

bringen alles auf eine Seite und fassen Faktoren von q_i zusammen:

$$\begin{aligned} & -k_{i-1} \Delta \mathbf{G}'_{i-1}(d_{i-1}) * \mathbf{q}_{i-1} \\ & + \left[k_{i-1} \Delta \mathbf{G}'_{i-1}(0) + k_i \Delta \mathbf{G}'_i(0) \right] * \mathbf{q}_i \\ & - k_i \Delta \mathbf{G}'_i(d_i) * \mathbf{q}_{i+1} = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Randbedingungen: Für die erste Grenzfläche (Oberfläche) müssen zwei Gleichungen erfüllt sein:

- die Oberflächenenergiebilanz mit $Q_G \equiv q_1$,

$$q_1 = -(Q_E + Q_H + Q_{Rn}), \quad (4.37)$$

die den Oberflächen-Bodenwärmestrom q_1 auf die Summe der restlichen Wärme-
flüsse zurückführt, welche als bekannt vorausgesetzt werden⁹, und

- die Wärmeleitung nach Glg. 4.29,

$$q_1^n = -k_1 [q_1 * \Delta G'_1(0) - q_2 * \Delta G'_1(d_1)], \quad (4.38)$$

die q_1 mit dem darunterliegenden q_2 koppelt.

Die Kombination ergibt

$$0 = \underbrace{Q_E + Q_H + Q_{Rn}}_{Q_{Rest}} - k_1 [q_1 * \Delta G'_1(0) - q_2 * \Delta G'_1(d_1)]. \quad (4.39)$$

Für die unterste Grenzfläche (Abb. 4.1) kann zum Beispiel Wärmeisolation, d.h. Adia-
basie, $q_{N+1}^n = 0$ angenommen werden.

Gleichungssystem: Nun kann eine Matrixgleichung der Form $Ax = b$ aufgestellt
werden. Die rechte Seite b der Matrixgleichung wird durch die Konvolutionen (Sum-
men, Glg. 2.22) mit den bisherigen Wärmeflüssen q^0, \dots, q^{n-1} gebildet. Um b auf die
andere Seite zu bringen werden die Konvolutionen in bekannte, d.h. alte, und unbe-
kannte aktuellen Wärmeflüsse q_i^n aufgespalten:

$$q * \Delta G = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} [q^{n-j} + q^{n-j+1}] \Delta G^j(x) \quad (4.40)$$

$$= \sum_{j=2}^n \frac{1}{2} [q^{n-j} + q^{n-j+1}] \Delta G^j(x) + \frac{q^{n-1} + q^n}{2} \Delta G^1(x) \quad (4.41)$$

$$= \underbrace{\sum_{j=2}^n \frac{1}{2} [q^{n-j} + q^{n-j+1}] \Delta G^j(x)}_{\equiv \tilde{q} * \widetilde{\Delta G}} + \frac{q^{n-1} \Delta G^1(x)}{2} + \frac{q^n \Delta G^1(x)}{2} \quad (4.42)$$

mit der Abkürzung $\tilde{q} * \widetilde{\Delta G}$ für die Konvolution exklusive des letzten Zeitschritts.

Mit dieser Schreibweise werden die drei Summanden in Glg. 4.36 jeweils aufgespal-

⁹ und wie in Abschnitt 4.3 als Funktion der Oberflächentemperatur bestimmt werden können

ten:

$$-k_{i-1}\Delta\mathbf{G}'_{i-1}(d_{i-1}) * \mathbf{q}_{i-1} = \underbrace{-k_{i-1}\widetilde{\Delta\mathbf{G}}'_{i-1}(d_{i-1}) * \widetilde{\mathbf{q}}_{i-1}}_I + \underbrace{-k_{i-1}\Delta G''_{i-1}(d_{i-1})/2 \cdot q_{i-1}^n}_{\equiv \alpha_i^n} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} [k_{i-1}\Delta\mathbf{G}'_{i-1}(0) + k_i\Delta\mathbf{G}'_i(0)] * \mathbf{q}_i &= \underbrace{[k_{i-1}\widetilde{\Delta\mathbf{G}}'_{i-1}(0) + k_i\widetilde{\Delta\mathbf{G}}'_i(0)] * \widetilde{\mathbf{q}}_i}_{II} \\ &+ \underbrace{[k_{i-1}\Delta G''_{i-1}(0) + k_i\Delta G''_i(0)]/2 \cdot q_i^n}_{\equiv \beta_i^n} \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$-k_i\Delta\mathbf{G}'_i(d_i) * \mathbf{q}_{i+1} = \underbrace{-k_i\widetilde{\Delta\mathbf{G}}'_i(d_i) * \widetilde{\mathbf{q}}_{i+1}}_{III} + \underbrace{-k_i\Delta G''_i(d_i)/2 \cdot q_{i+1}^n}_{\equiv \gamma_i^n} \quad (4.45)$$

$$(I) + (II) + (III) \equiv -C_i^n \quad (4.46)$$

Mit diesen Abkürzungen lässt sich 4.36 verkürzt schreiben als

$$C_i^n = \alpha_i^n q_{i-1}^n + \beta_i^n q_i^n + \gamma_i^n q_{i+1}^n \quad i \in 2, 3, \dots, N \quad (4.47)$$

Diese Gleichung definiert die Zeilen 2 bis N der Matrix A .

Für Zeile 1 werden ebenfalls die Konstanten aus Glg. 4.39 extrahiert

$$0 = Q_{Rest} + \underbrace{-k_1 \left[\widetilde{\mathbf{q}}_1 * \widetilde{\Delta\mathbf{G}}'_1(0) - \widetilde{\mathbf{q}}_2 * \widetilde{\Delta\mathbf{G}}'_1(d_1) \right]}_{\equiv C_1^n} - k_1\Delta G''_1(0)/2 \cdot q_1^n + k_1\Delta G''_1(d_1)/2 \cdot q_2^n \quad (4.48)$$

und auf die rechte Seite gebracht

$$\underbrace{k_1\Delta G''_1(0)/2 \cdot q_1^n}_{\equiv \alpha_1^n} + \underbrace{-k_1\Delta G''_1(d_1)/2 \cdot q_2^n}_{\equiv \beta_1^n} = Q_{Rest} + C_1^n \quad (4.49)$$

Zeile $N + 1$ wird durch die untere Randbedingung definiert:

$$1 \cdot q_{N+1}^n = 0 \quad (4.50)$$

Das Gleichungssystem lautet damit

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^n & \beta_1^n & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \alpha_2^n & \beta_2^n & \gamma_2^n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \alpha_i^n & \beta_i^n & \gamma_i^n & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \alpha_N^n & \beta_N^n & \gamma_N^n \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1^n \\ q_2^n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{N+1}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{Rest} + C_1^n \\ C_2^n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_N^n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

Lösung: Um die Oberflächentemperatur mit bekanntem q_1 und q_2 zu bestimmen, kann wie im Ein-Schichten-Modell Wang et al. (2010) verwendet werden:

$$T_1^n = T^0 - k_1 [\mathbf{q}_1 * \Delta \mathbf{G}_1(0) - \mathbf{q}_2 * \Delta \mathbf{G}_1(d_1)] \quad (4.52)$$

Die Frage nach der Oberflächentemperatur ist damit auf die Frage nach q_1^n und q_2^n zurückgeführt worden. Diese werden durch Lösung des obigen Gleichungssystems 4.51 bestimmt. Damit wird die Frage nach den Wärmeströmen q_1^n und q_2^n auf die Frage nach den äußeren Forcing-Faktoren Q_{Rest} (fühlbare, latente Wärme, Strahlung), die thermischen Eigenschaften (Koeffizientenmatrix), sowie die bisherige Wärmespeicherung (Zeitschritt-abhängige Konstanten C_i^n) zurückgeführt.

Die Gleichungen für Q_{Rest} , q_i^n und T_1^n stellen wiederum eine Fixpunktgleichung für die Oberflächentemperatur T_1^n dar, da zu jedem Zeitschritt T_1^n zuerst geschätzt werden muss¹⁰ zur Berechnung (Approximation) von Q_{Rest} , damit dann die internen Wärmeflüsse q_i^n (mit 4.51) berechnet werden können, womit dann T_1^n (mit 4.52) bestimmt werden kann. Mit jeder Iteration sollte sich der Schätzwert für T_1^n näher an den exakten Wert annähern¹¹.

¹⁰ da keine prognostische Gleichung vorliegt (siehe Abschnitt 4.3)

¹¹ sofern die Bedingungen in Abschn. 2.3.2 gegeben sind

4.4 Räumlich diskretes Modell

Zur Plausibilitätskontrolle der von den anderen beiden Modellen (Abschnitt 4.2 und 4.3) berechneten Oberflächentemperatur wurde ein Modell umgesetzt, das die Wärmeleitungsgleichung 2.8 im Boden in Raum und Zeit diskretisiert löst und als Randbedingung die Energiebilanzgleichung für die Oberflächenschicht hat.

Die Vorhersage der Temperatur ist mit dem Nässeparameter W gekoppelt, für den ebenfalls eine prognostische Gleichung gelöst werden muss.

Die unabhängigen Variablen in diesem Modell sind der Nässeparameter (*Road Water*) W [kg/m²] und die Oberflächentemperatur T . Die Energiebilanz der Oberflächenschicht liefert die prognostische Gleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho c} \frac{\Delta H}{\Delta z} \quad (4.53)$$

wobei Δz die Dicke der Bodenschicht ist. Damit ist die Oberflächentemperatur in dieser Variante von Gleichung 2.6 genau genommen eine mittlere Temperatur über die Schicht und stimmt nicht mehr exakt mit der Oberflächentemperatur überein. Für geringe Δz ist der Fehler meist vernachlässigbar. Der Fehler durch die endliche Schichtdicke hängt von der Konduktivität und der Stärke des Bodenwärmeflusses an der Oberfläche ab. Liegt ein hoher Wärmeeintrag von oben vor, dann wird die Oberfläche naturgemäß viel heißer sein, als darunterliegende Bodenschichten, welche sich erst später erwärmen können. Leitet das Material Wärme gut, so werden tiefere Schichten schneller erwärmt und es kann sich bei gleichem Wärmefluss nur ein geringerer Temperaturgradient aufbauen.

Der Bodenwärmefluss zwischen den Schichten i und $i + 1$ im räumlich diskreten Modell ist durch die Differenzgleichung

$$q_{i+1} = 2 \overline{k_{i,i+1}} \frac{T_{i+1} - T_i}{d_{i+1} + d_i} \quad (4.54)$$

mit der mittleren Konduktivität $\overline{k_{i,i+1}}$ und den Schichtdicken d_i gegeben (Wang et al., 2010).

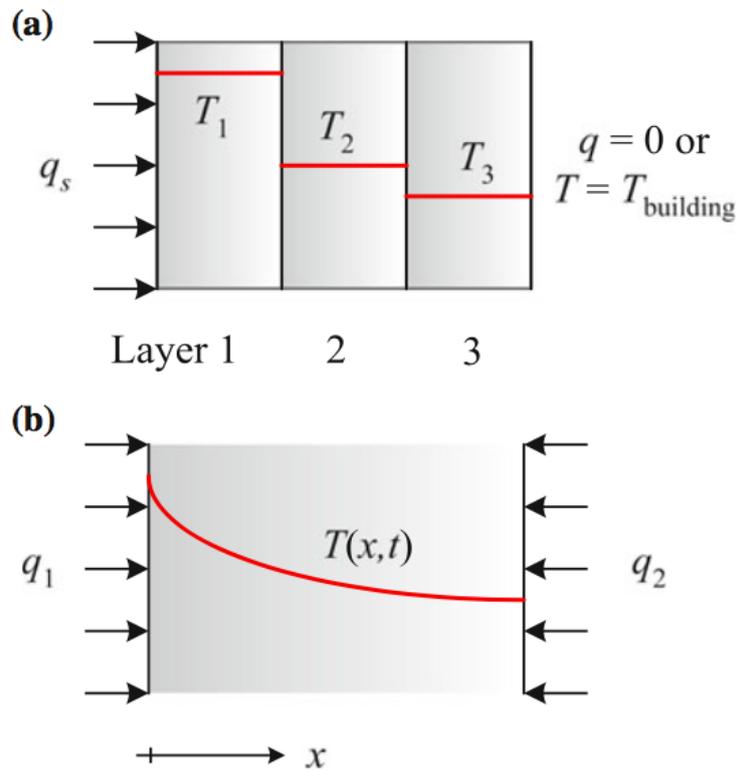


Abbildung 4.4: Vergleich räumlich diskret / analytisch, Grafik aus Wang et al. (2010)

Lösung: Zur Vorhersage der Temperatur wird die Tendenzgleichung (4.53) numerisch integriert (Heun-Methode)

$$T^n = T^{n-1} + \frac{\Delta t}{2} \left[\dot{T}^{n-1} + \dot{T}(t^n, T^*) \right] \quad (4.55)$$

$$\text{mit } T^* = T^{n-1} + \Delta t \cdot \dot{T}^{n-1} \quad (4.56)$$

Im Vergleich zur Euler-Vorwärts-Methode ist die Heun-Methode besser geeignet, da unter anderem auch bereits die Forcing-Faktoren (Strahlung, Niederschlag, Lufttemperatur, ...) des nächsten Zeitschritts t^n berücksichtigt werden.

Danach werden die unterirdischen Wärmeflüsse q_i^n mit T^n in einem FTCS-Schema¹² aktualisiert.

¹² FTCS: Forward in time, central in space

5 Diskussion

5.1 Anwendung auf Messdaten

Im Rahmen der Bachelorarbeit wurden die vorgestellten Modelle in einigen Szenarien mit Messdaten getestet. Ausgewählte Aspekte sollen nun anhand der Abbildungen im Anhang diskutiert werden. Anzumerken ist, dass die vorliegenden Grafiken jedenfalls nicht zur Validierung im engeren Sinn geeignet sind, da die Daten bereits dazu genutzt wurden, Bodenparameter wie Wärmekapazität und Konduktivität zu schätzen. Daher ist die Messung der Vorhersagequalität durch Berechnung der Vorhersagefehler nicht zulässig.

Messdaten: Zum Testen der Modelle stellte UBIMET einen Datensatz aus in-situ Messungen einer Asphaltoberfläche am Red Bull-Ring in Spielberg zur Verfügung. So wurde die Oberflächentemperatur kontaktlos (mittels Vaisala DST111) und viele Standardparameter wie 2 m-Lufttemperatur und Feuchte, sowie 10 m-Wind gemessen. Wichtige weitere Parameter, wie die kurzwellige Strahlung oder die langwellige Gegenstrahlung standen leider nicht direkt vor Ort zur Verfügung. Glücklicherweise konnte zumindest die kurzwellige Strahlung von der Messstation am Fliegerhorst Zeltweg in 2 km Entfernung übernommen werden. Dies sollte man bei der Betrachtung der Diagramme im Hinterkopf behalten. Die atmosphärische Gegenstrahlung muss daher über diverse Ansätze parametrisiert werden (siehe Abschnitt 3.1). Die thermischen Eigenschaften des Asphalts werden geschätzt, sollten jedoch bei operationeller Umsetzung experimentell bestimmt werden.

Polynom-Modell: Aufgrund der fehlenden Daten zur langwelligen atmosphärischen Gegenstrahlung werden vier Parametrisierungen getestet. Am Größten sind die Auswirkungen auf die nächtliche Abkühlung nach Sonnenuntergang. Während sich Brutsaert, Qin & Hiller und Burridge & Gadd untereinander nur um einen Bias unterscheiden, folgt Prata der Verlaufsform der anderen Modelle eher. Untertags können besonders

beim Polynom-Modell hohe Schwankungen auftreten. Dies liegt daran, dass der Bodenwärmestrom zu einfach parametrisiert ist. So wird eine Temperaturdifferenz die real auf wenigen Zentimetern vorliegt, im Modell auf einigen Dezimetern vorliegen, wodurch der Bodenwärmestrom reduziert wird - ein Umstand der in den anderen Modellen vermieden wird. So wird bei hoher Einstrahlung die Oberflächentemperatur über- und Nachts unterschätzt.

Räumlich diskretes Modell: Um Temperaturgradienten an der Oberfläche bestmöglich darzustellen, werden folgende Schichtdicken verwendet (von der Oberfläche nach unten, in Metern, gerundet): 0.02, 0.03, 0.04, 0.06, 0.08, 0.11, 0.15, 0.21, 0.30, 0.41. Die Untergrenze der tiefsten Schicht liegt in 1.4 m Tiefe. Neben begrenzten Auflösung von Temperaturgradienten nahe der Oberfläche ist ein weiterer Nachteil, dass die externen Faktoren je nach Zeitschritt auf ein engmaschiges Zeitgitter hinunterskaliert werden müssen. Als Anfangsbedingung wird die Bodentemperatur in allen Tiefen auf die gemessene Oberflächentemperatur zum Ausgangszeitpunkt gesetzt. Eine Einschwingdauer ist einzukalkulieren, bis sich der unterirdische Temperaturverlauf von der vertikal konstanten Anfangstemperatur zu einem realistischen Profil wandelt. Die kurzen Zeitschritte, die zur Stabilität notwendig sind, machen das räumlich diskrete Modell zum langsamsten Modell am Rechner.

Räumlich analytisches Modell: Es zeigt sich durch alle Testszenarien, dass das räumlich analytische Modell kaum Abweichungen zum diskreten Modell mit zehn Schichten aufweist. Daher wird davon ausgegangen, dass das räumlich analytische im Vergleich zum diskreten Modell die gleiche Vorhersagequalität bei verringertem Ressourcenaufwand erbringt. Ein Charakteristikum ist in den Abbildungen zu erkennen: Das räumlich analytische Modell weist um maximal 1 K geringere Tagesgänge als das diskrete Modell auf. Das könnte an der schlechteren räumlichen Auflösung des Temperaturverlaufs im diskreten Modell liegen, während im analytischen höhere Temperaturgradienten auftreten können. Der stärkere oberflächennahe Temperaturgradient führt Wärme schneller in den Boden ab.

Fluss latenter Wärme: Ob der latente Wärmefluss richtig eingeschätzt wird, lässt sich schwer beurteilen, jedoch zeigt sich, dass ohne Berücksichtigung der Verdunstung eine zu hohe Temperatur auftritt¹. Bei starken Regenintensitäten reicht der latente Wär-

¹ in den Abbildungen nicht gezeigt

mefluss jedoch nicht aus, um die Messwerte zu rekonstruieren. In diesem Fall ist die Inklusion des „Kälteeintrags“ durch Regen Q_{rain} jedenfalls notwendig. Bei den hier auftretenden Intensitäten fällt dieser Wärmefluss jedoch kaum ins Gewicht. Zusätzlich zeigen sich Inkonsistenzen in den Messdaten an der Rennbahn und am Fliegerhorst Zeltweg. So wurde am 16.06.2015 an der Rennbahn starke Niederschläge registriert, während am Fliegerhorst bereits intensive kurzweilige Einstrahlung gemessen wurde.

Ausblick: Um die Frage zu klären, ob die vorgestellten Modelle in operativem Betrieb eine Vorhersagequalität vergleichbar zum diskreten Modell erreichen können, müssen erstens die Modelle mit Daten von einem Wettermodell beliefert werden und zweitens zum Vergleich die Modelle mit vollständigen, hochaufgelösten² Messdaten inklusive lang- und kurzweiliger Strahlung befüttert werden. Drittens wären die Oberflächen- und Bodenparameter experimentell zu bestimmen.

² etwa minütlich

Literaturverzeichnis

- Anderson, S. P., A. Hinton, and R. A. Weller, 1998: Moored observations of precipitation temperature. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, **15** (4), 979–986.
- Batchelor, G. K., 2000: *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, doi:10.1017/CBO9780511800955, URL <https://www.cambridge.org/core/books/an-introduction-to-fluid-dynamics/18AA1576B9C579CE25621E80F9266993>.
- Beck, J. V., B. Blackwell, and C. R. S. Clair Jr, 1985: *Inverse heat conduction: Ill-posed problems*. Wiley-Interscience.
- Beck, J. V., K. D. Cole, A. Haji-Sheikh, and B. Litkouhi, 1992: *Heat conduction using Green's functions*. Hemisphere Publishing Corporation Washington DC.
- Bhumralkar, C. M., 1975: Numerical experiments on the computation of ground surface temperature in an atmospheric general circulation model. *Journal of Applied Meteorology*, **14** (7), 1246–1258.
- Carslaw, H. S., and J. C. Jaeger, 1959: *Conduction of heat in solids*. Oxford: Clarendon Press, 1959, 2nd ed.
- Crevier, L.-P., and Y. Delage, 2001: Metro: A new model for road-condition forecasting in Canada. *Journal of Applied Meteorology*, **40** (11), 2026–2037.
- Flament, P., and M. Sawyer, 1995: Observations of the effect of rain temperature on the surface heat flux in the intertropical convergence zone. *Journal of physical oceanography*, **25** (3), 413–419.
- Foken, T., 2006: *Angewandte Meteorologie: Mikrometeorologische Methoden*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Hahn, D. W., and M. N. Ozisik, 2012: *Heat conduction*. John Wiley & Sons.
- Haider, J., 2013: Numerische Modellierung von Verdampfungs- und Kondensationsphänomenen. Masterarbeit, Universität Stuttgart, <http://elib.dlr.de/85434/>.
- Hantel, M., 2013: *Einführung Theoretische Meteorologie*. Springer Science + Business Media, doi:10.1007/978-3-8274-3056-4, URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8274-3056-4>.

- Honerkamp, J., and H. Römer, 2012: *Klassische Theoretische Physik*. Springer Berlin Heidelberg, doi:10.1007/978-3-642-23262-6, URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-23262-6>.
- Lebon, G., D. Jou, and J. Casas-Vázquez, 2008: *Understanding Non-equilibrium Thermodynamics*. Springer Science + Business Media, doi:10.1007/978-3-540-74252-4, URL <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-74252-4>.
- Louis, J.-F., 1979: A parametric model of vertical eddy fluxes in the atmosphere. *Bound.-Layer Meteor.*, **17**, 187–202.
- Nobelprize.org, abgerufen am 11.9.16: The nobel prize in chemistry. http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/chemistry/laureates/.
- Pürrer, M., 2014: Skriptum Scientific Computing. Revisions G. Kresse, Selbstverlag.
- Qin, Y., and J. E. Hiller, 2011: Modeling temperature distribution in rigid pavement slabs: Impact of air temperature. *Construction and Building Materials*, **25 (9)**, 3753 – 3761, doi:<http://dx.doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2011.04.015>, URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0950061811001553>.
- Rost, J., 2004: Vergleichende Analyse der Energiebilanz zweier Untersuchungsflächen der Landnutzungen Grasland und Wald in der südlichen Oberrheinebene. *Berichte des Meteorologischen Institutes der Universität Freiburg*, **Nr. 9**.
- Sass, B. H., 1992: A numerical model for prediction of road temperature and ice. *J. Appl. Meteor.*, **31**, 1499–1506.
- Sass, B. H., 1997: A numerical forecasting system for the prediction of slippery roads. *Journal of Applied Meteorology*, **36 (6)**, 801–817, doi:10.1175/1520-0450(1997)036<0801:ANFSFT>2.0.CO;2.
- Stensrud, D. J., 2009: *Parameterization schemes: keys to understanding numerical weather prediction models*. Cambridge University Press.
- Stull, R. B., 2012: *An introduction to boundary layer meteorology*, Vol. 13. Springer Science & Business Media.
- Wang, Z.-H., S. K. Au, and K. H. Tan, 2005: Heat transfer analysis using a green's function approach for uniformly insulated steel members subjected to fire. *Engineering Structures*, **27 (10)**, 1551–1562.
- Wang, Z.-H., E. Bou-Zeid, and J. A. Smith, 2010: A spatially-analytical scheme for surface temperatures and conductive heat fluxes in urban canopy models. *Boundary-Layer Meteorology*, **138 (2)**, 171–193, doi:10.1007/s10546-010-9552-6, URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10546-010-9552-6>.

Appendix - Formeln

Verdampfungswärme: Für die spezifische Verdampfungswärme $L(T)$ steht eine Näherung als Polynom dritten Grades nach Rogers & Yau (1989) zur Verfügung:

$$L(T) \approx a + bT + cT^2 + dT^3$$

mit den Zahlenwerten $a = 2.5008 \cdot 10^6$, $b = -2.36 \cdot 10^3$, $c = 1.6$, $d = -6 \cdot 10^{-2}$.

Sättigungsdampfdruck: Für den Sättigungsdampfdruck wurde die Näherung von Goff (1957) verwendet, welche von der WMO empfohlen wurde:

$$\begin{aligned} \log_{10} e_w = & 10.79574(1 - 273.16/T) - 5.02800 \log_{10}(T/273.16) \\ & + 1.5047510 - 4(1 - 10(-8.2969 * (T/273.16 - 1))) \\ & + 0.4287310 - 3(10(+4.76955 * (1 - 273.16/T)) - 1) \\ & + 0.78614 \end{aligned}$$

mit T in [K] and e_w in [hPa]. Ein Druckfehler der WMO-Publikation 1988, korrigiert im Jahr 2000, wurde berücksichtigt.

Referenz: World Meteorological Organization, General meteorological standards and recommended practices, Appendix A, WMO Technical Regulations, WMO-No. 49, corrigendum, Geneva August 2000.

Appendix - Anwendung auf Messdaten

Es folgen Diagramme der Modellvorhersagen mit Messdaten aus den Jahren 2014 und 2015. Zu sehen sind die Zeitreihen der Oberflächentemperaturen in rot (räumlich analytisches Modell), in blau (vollständig diskretes Modell) und grün (Polynom-Modell). Die stündlich gemessenen Oberflächentemperaturen sind als schwarze Punkte dargestellt. Die 2 m-Lufttemperatur ist blau gestrichelt, die Feuchttemperatur blau gestrich-punktet darunter. Fällt in einem Zeitintervall von fünf Minuten Regen, so wird die Fläche grau hinterlegt. Intensitäten größer 1 mm/h sind am dunkelsten, zwischen 0.1 und 1 mm/h mäßig dunkelgrau.

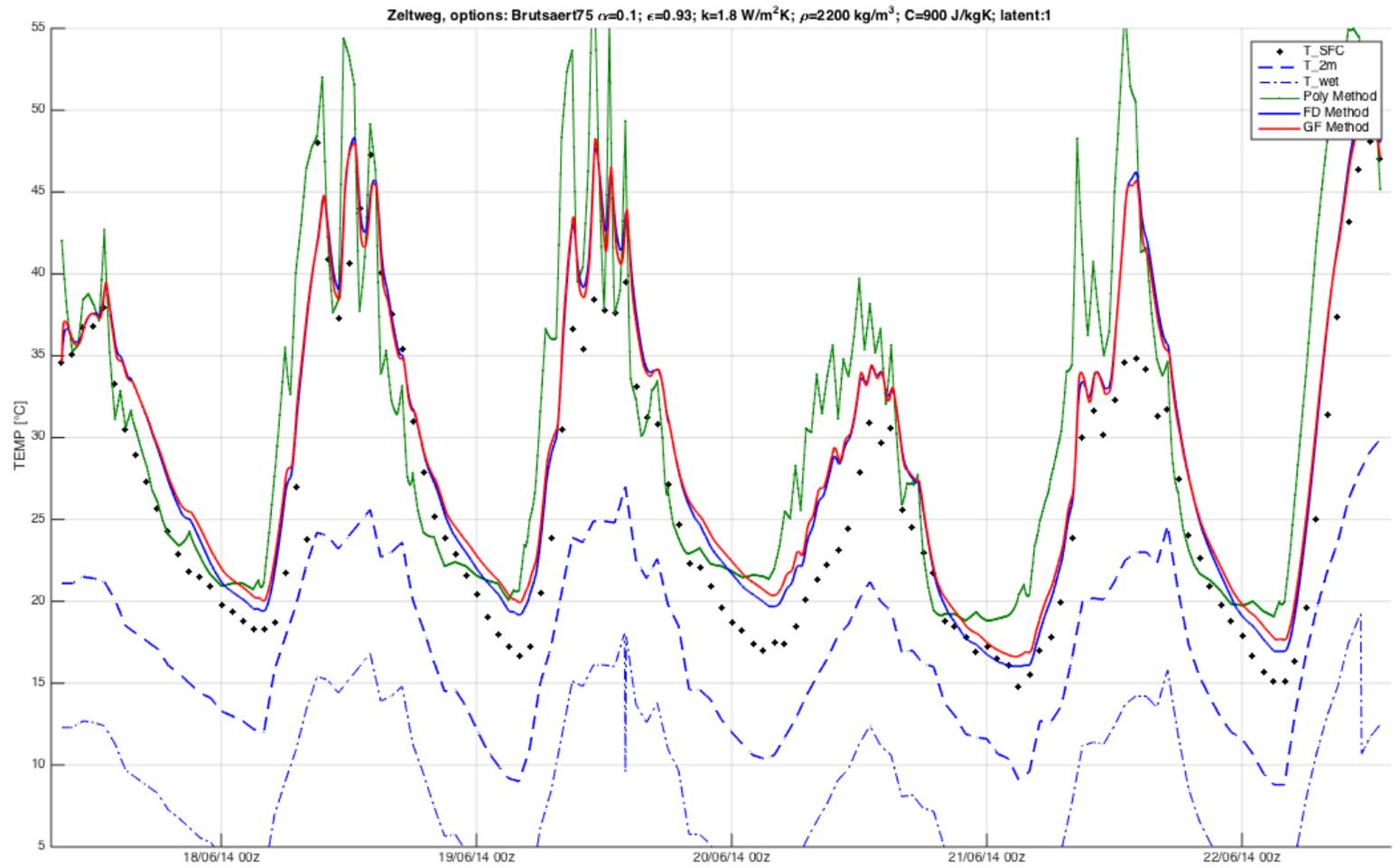


Abbildung .1: Szenario 2014 mit langwelliger Gegenstrahlung nach Brutsaert (1975)

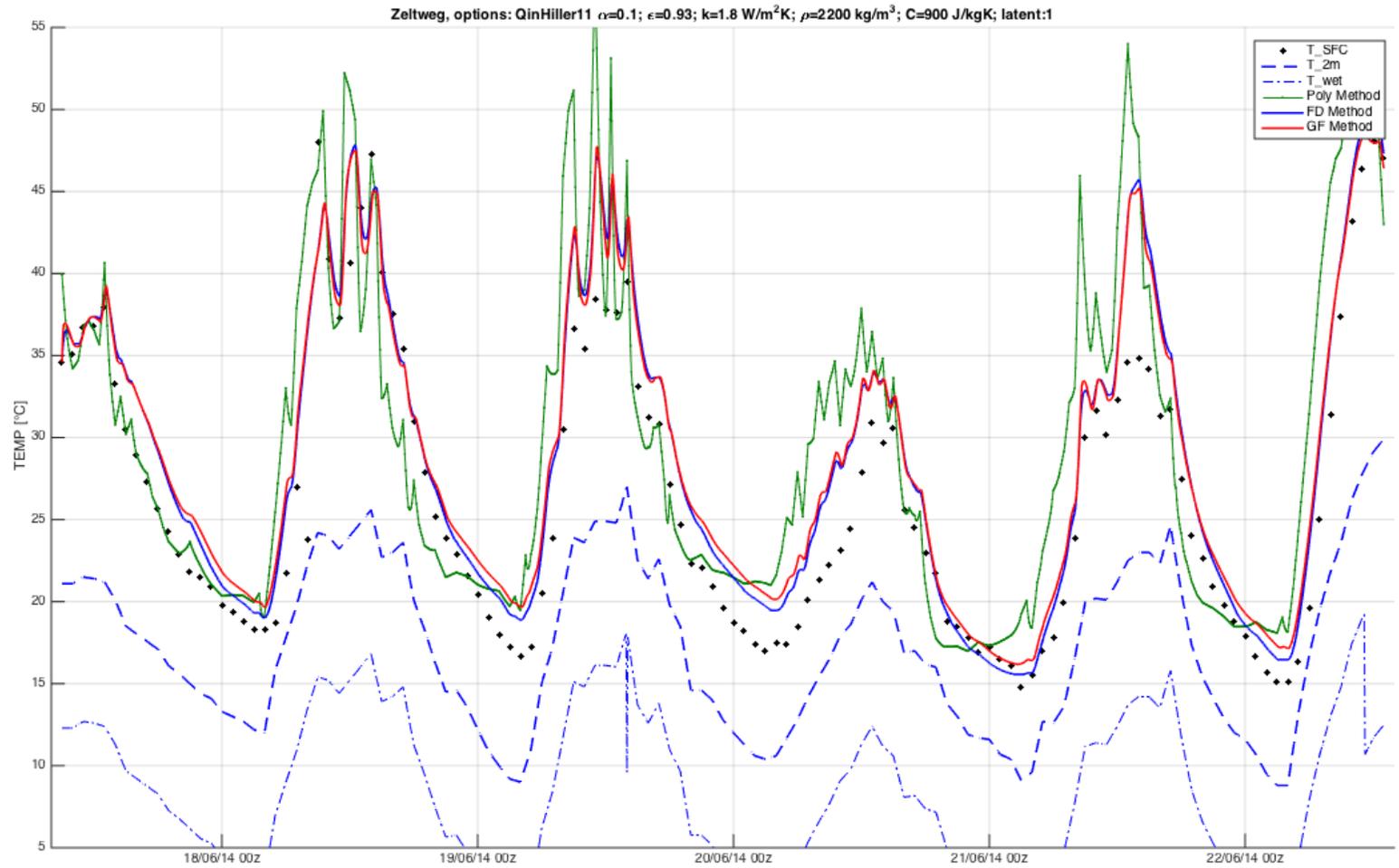


Abbildung .2: Szenario 2014 mit langwelliger Gegenstrahlung nach Qin & Hiller (2011)

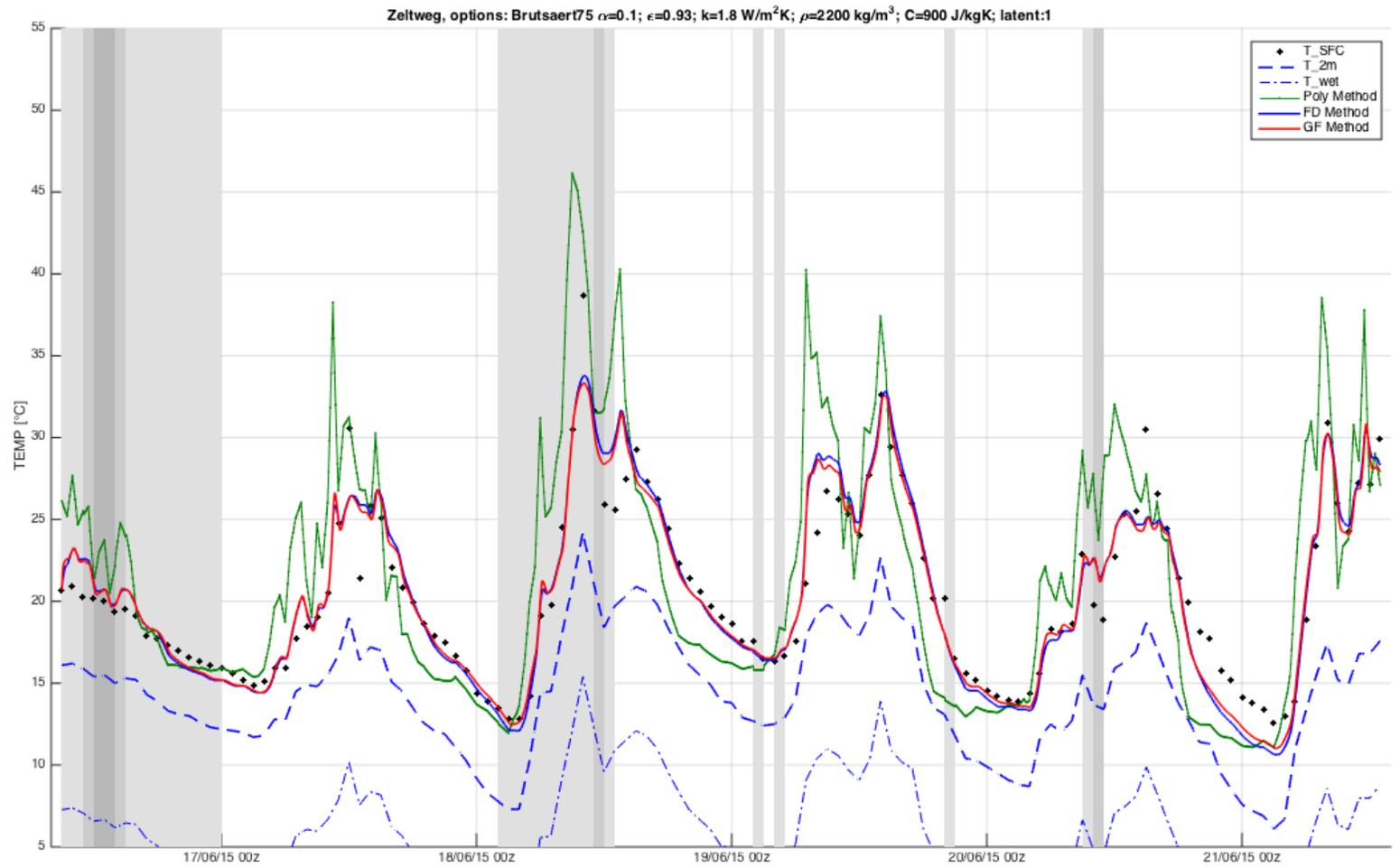


Abbildung .3: Szenario 2015 mit langwelliger Gegenstrahlung nach Brutsaert (1975)

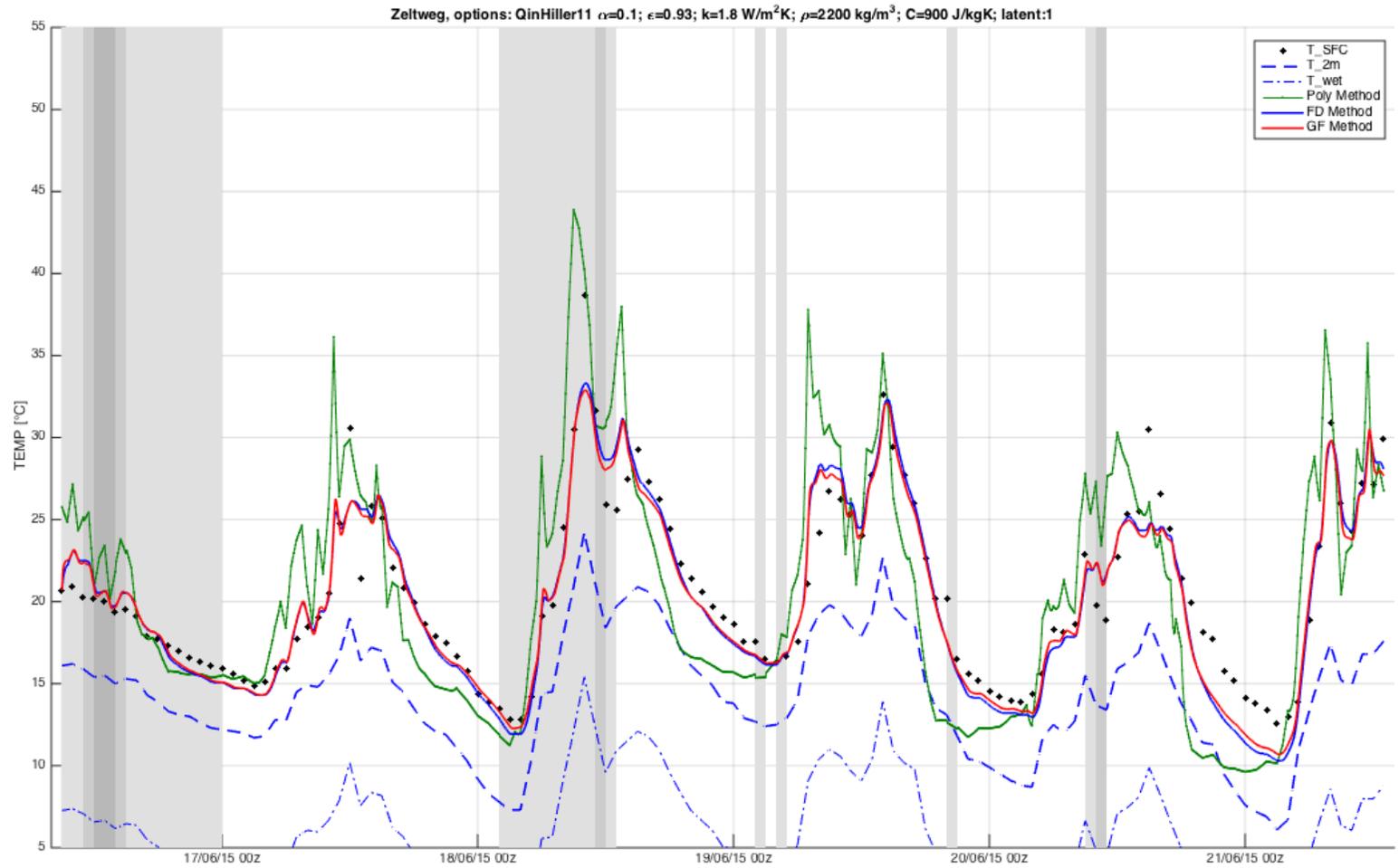


Abbildung .4: Szenario 2015 mit langwelliger Gegenstrahlung nach Qin & Hiller (2011)

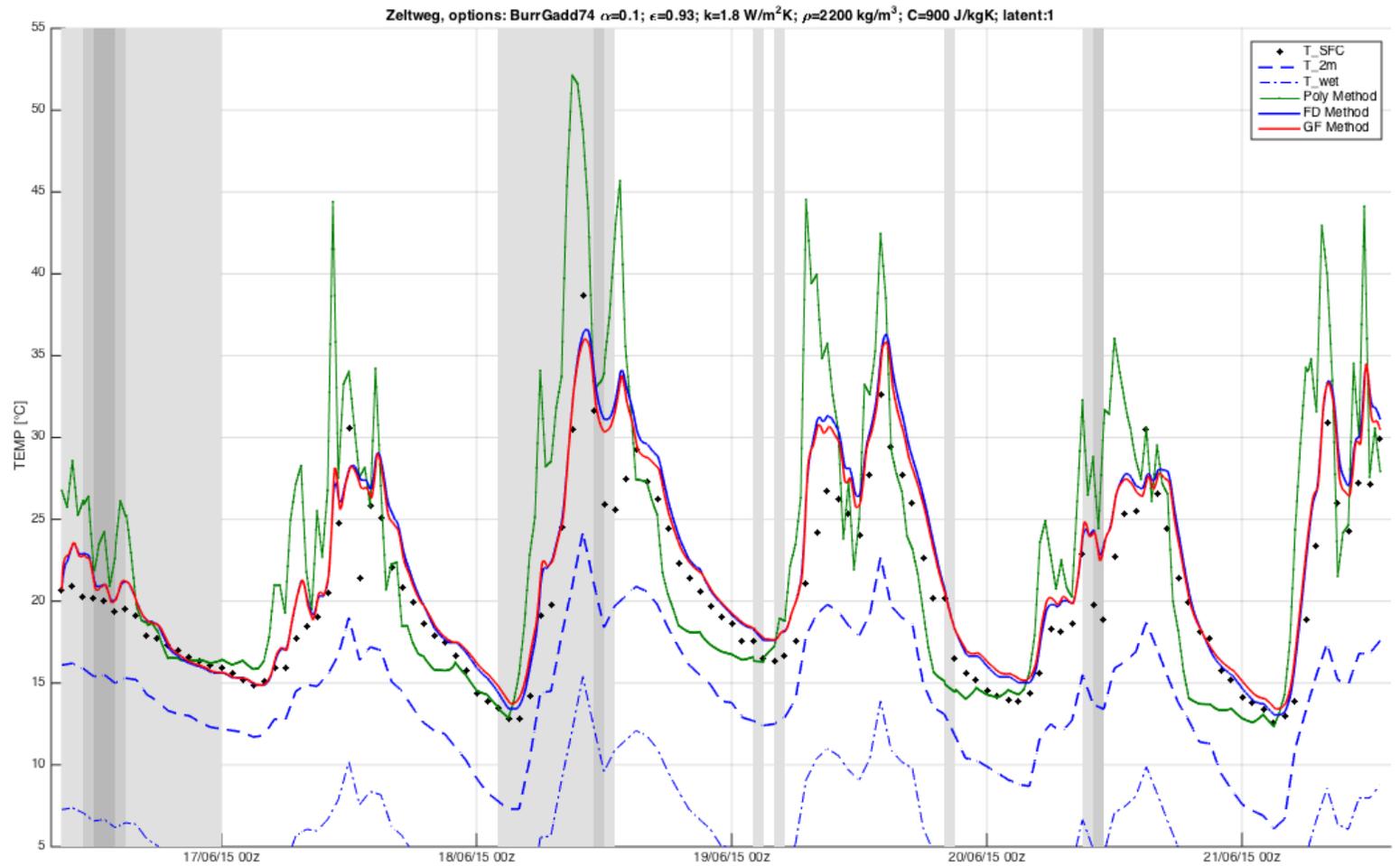


Abbildung .5: Szenario 2015 mit langwelliger Gegenstrahlung nach Burridge & Gadd (1975)

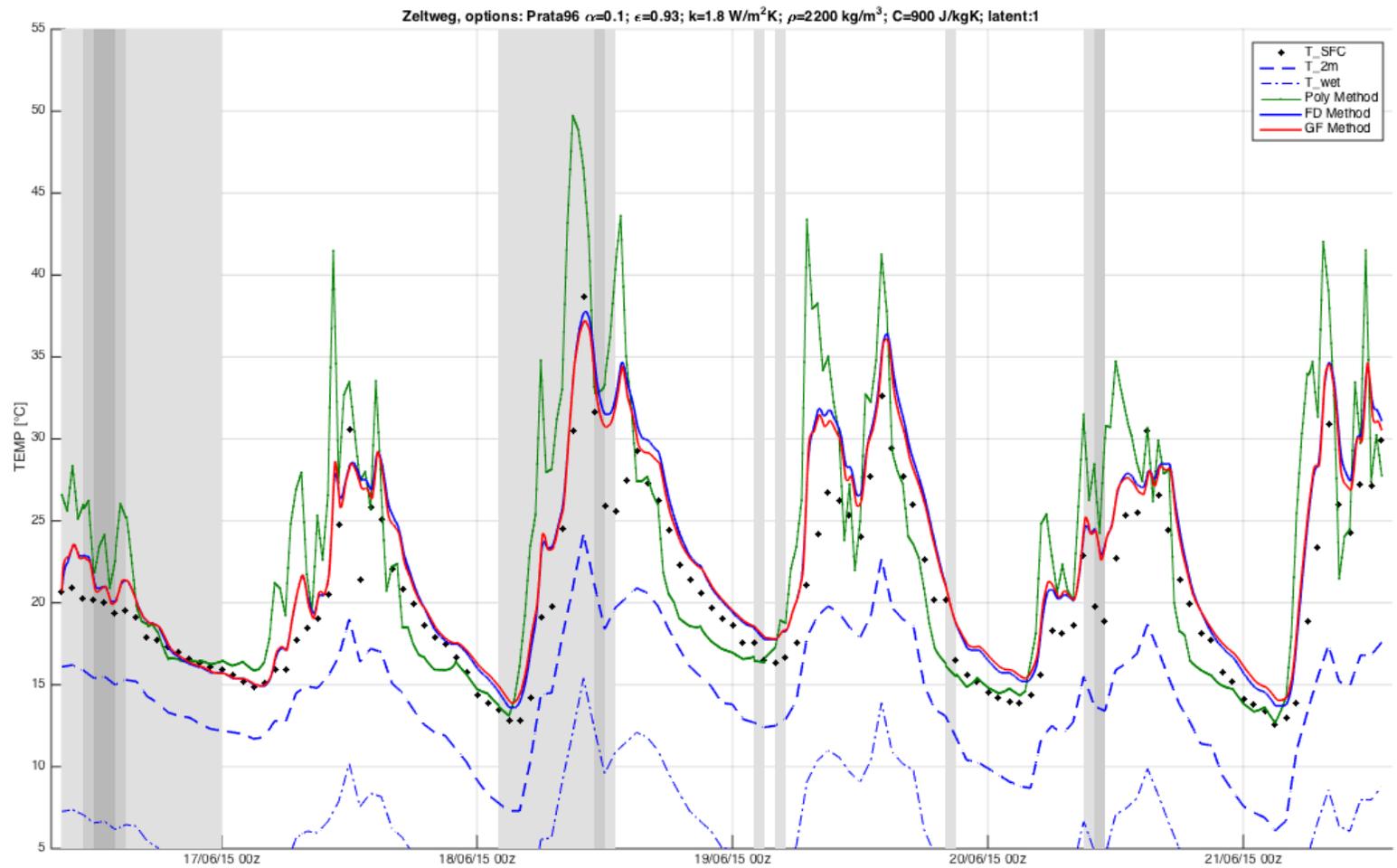


Abbildung .6: Szenario 2015 mit langwelliger Gegenstrahlung nach Prata et. al. (1996)